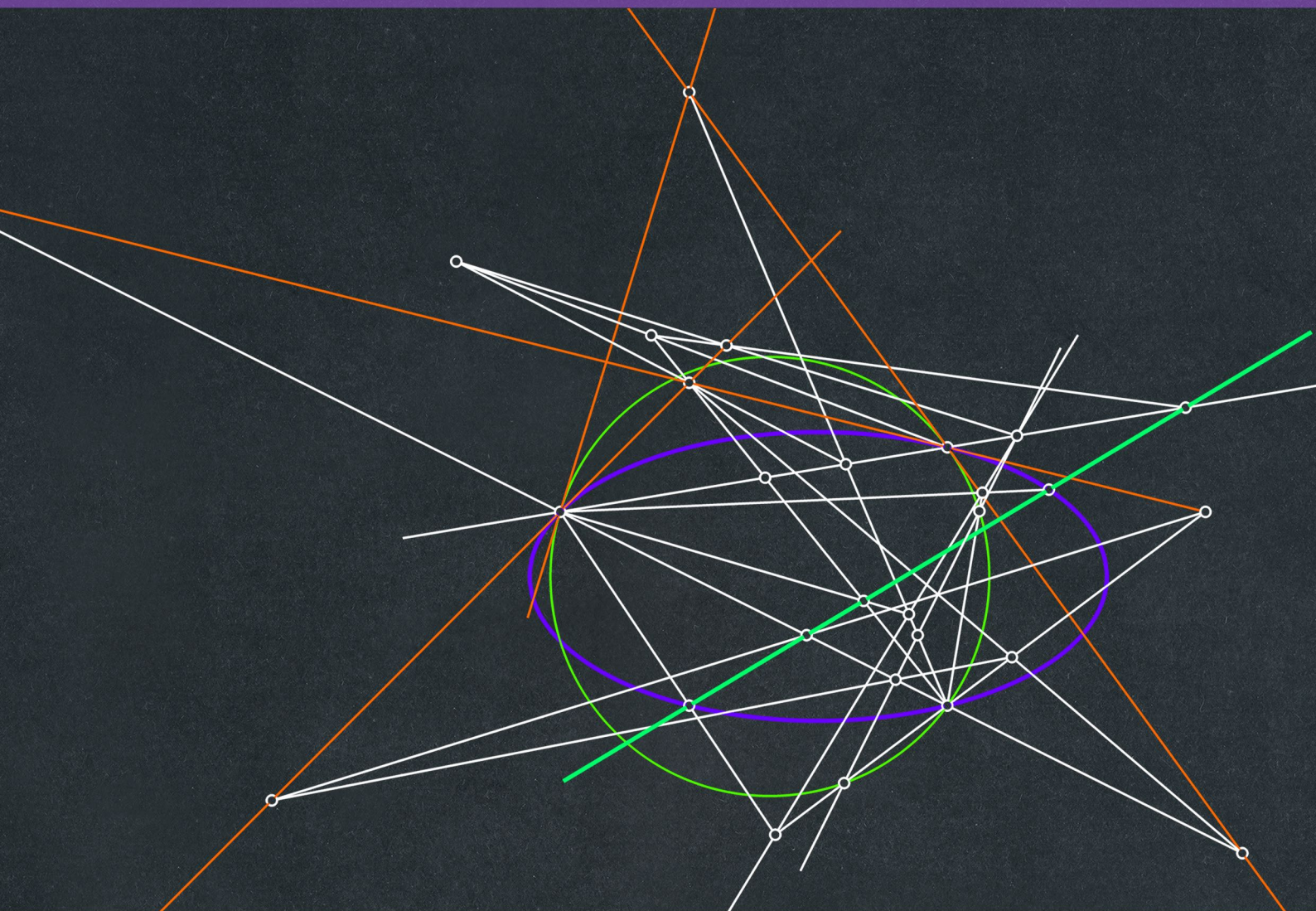




НИЖА ГЕОМЕТРИЈА

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА
ПРОЈЕКТИВНА ГЕОМЕТРИЈА
АФИНА ГЕОМЕТРИЈА

ВЛАДИЦА АНДРЕЈИЋ

Владица Андрејић

НИЖА ГЕОМЕТРИЈА

**Аналитичка геометрија
Пројективна геометрија
Афина геометрија**

БЕОГРАД, 08.06.2026

ПРЕДГОВОР

Два од неколико најзначајнијих догађаја у историји геометрије догодила су се касних тридесетих година 17. века у Француској. Један је откриће и систематска употреба координата за коју су заслужни, независно један од другог, Декарт¹ [24] и Ферма² [30]. Координате су омогућиле интензивну употребу алгебре и анализе у основама и развоју геометрије, те је тако настала аналитичка геометрија. Други догађај је прво изучавање фигура које су перспективно инваријантне за шта је заслужан Дезарг³ [22], а што је даље условило настанак пројективне геометрије.

Ова књига настала је на основу вишегодишњег искуства које је аутор стекао држећи предавања и вежбе на Математичком факултету у Београду. Предмет изучавања ове књиге су аналитичка, пројективна и афина геометрија.

Пројективна геометрија базирана је на уџбенику *Пројективна геометрија равни* [3]. Геометрију пројективне равни заснивамо синтетички тако што постепено уводимо аксиоме и строго формално доказујемо одговарајуће теореме. Паралелно се служимо аналитичким методама да бисмо посматрана својства демонстрирали у најважнијем специјалном случају реалне пројективне равни.

Секције које су означене симболом * садрже материјал који је уско специјализован или доста напредан, те се може прескочити приликом првог (или другог) читања.

Књига садржи велики број слика које су креиране помоћу програма GCLC.

у Београду 2026.
В. Андрејић

¹René Descartes (1596–1650), француски филозоф и математичар

²Pierre de Fermat (1601–1665), француски математичар и правник

³Girard Desargues (1591–1661), француски математичар и инжењер

САДРЖАЈ

Предговор	iii
Садржај	iv
1 Аналитичка геометрија	1
1.1 Вектори у геометрији	1
1.2 Векторска алгебра	6
1.3 Координате вектора и тачака	11
1.4 Права и раван	13
1.5 Растојања и углови	15
1.6 Поларне координате	17
1.7 Конике	18
1.8 Криве другог реда	23
1.9 Инваријанте кривих другог реда	27
1.10 Центар, тангента, дијаметар	32
1.11 Површи другог реда	36
1.12 Праволинијске површи	41
1.13 Сферна геометрија	44
2 Пројективна раван	50
2.1 Аксиоматски метод	53
2.2 Аксиоме пројективне равни	54
2.3 Интуитивна пројективна раван	57
2.4 Аналитичка пројективна раван	59
2.5 Координатизација пројективне равни *	62
2.6 Коначна пројективна раван	66
2.7 Латински квадрати *	69
2.8 Егзистенција коначних равни *	73
3 Дезаргова, Папосова и Бахманова раван	76
3.1 Дезаргово тврђење	76
3.2 Пројективни простор	81
3.3 Пројективитети	83
3.4 Аналитичка пројективна права	85
3.5 Дворамера	89
3.6 Фиксне тачке пројективитета	93
3.7 Инволуције	96
3.8 Папосово тврђење	98
3.9 Координатизација Дезаргове равни *	103
3.10 Хармонијска четворка	107
3.11 Бахманова раван	110

4	Колинеације	113
4.1	Пројективне колинеације	113
4.2	Перспективне колинеације	116
4.3	Перспективне афиности	122
4.4	Колинеација реалне пројективне равни	124
4.5	Фиксни елементи колинеације	129
5	Конике	137
5.1	Конике Папосове равни	137
5.2	Конике реалне пројективне равни	140
5.3	Паскалова теорема	142
5.4	Корелације	146
5.5	Пол и полара реалне пројективне равни	154
5.6	Разни примери	160
6	Афина геометрија	163
6.1	Афини простор и потпростор	165
6.2	Афина пресликавања	168
6.3	Паралелно пројектовање	172
6.4	Дилатација и трансекција	173
6.5	Еуклидски афини простори	173
6.6	Изометрије и симетрије	174
6.7	Класификација изометрија и сличности	176
A	Додатак	179
A.1	Сопствена структура квадратне матрице	179
A.2	Теорија бројева	180
	Литература	182
	Индекс појмова	186

АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

Елементарна геометрија (која се учи у школи) бави се основним геометријским концептима као што су тачке, праве и равни, одакле се даље изводе компликованији концепти као што су растојање, угао, крива и површ. Она се заснива на визуелном утиску, а особине геометријских објеката формулише кроз аксиоме, несумњиве истине (које не захтевају доказ) до којих стижемо интуицијом. Из тих аксиома, логичко дедуктивним аргументима се изводе разне теореме које углавном такође имају упориште у визуелном утиску. Систематизација геометрије кулминира у Еуклидовим¹ *Елементима* који су вековима сматрани за модел савршене математичке теорије.

Са друге стране, аналитичка геометрија се суштински бави тим истим геометријским објектима, при чему је разлика у методи изучавања. Аналитичка геометрија се базира на алгебарским методама, односно на нумеричком опису геометријских објеката и њихових особина. Прелазак са геометријског описа на нумерички остварује се увођењем координатног система. Основна идеја је да се тачке простора представљају координатама, док се остали геометријски објекти (праве, равни, криве, површи) описују једначинама. Дакле, геометријски објекти изражени су нумеричким информацијама, а испитивање њихових међусобних односа углавном се своди на решавање система једначина.

Сматра се да је основе модерне аналитичке геометрије поставио Рене Декарт када је 1637. године објавио есеј под називом *Геометрија*, као један од три есеја његове *Расправе о методи* [24]. Међутим, вреди напоменути да је и Пјер де Ферма такође развијао аналитичку геометрију, иако је његов рад тек постхумно објављен [30].

1.1 Вектори у геометрији

У овој књизи, основа за увођење аналитичке геометрије је еуклидска раван или еуклидски простор $\mathbb{E}$, што је простор са којим се сусрећемо у свакодневном животу. Дакле, симбол $\mathbb{E}$, осим што означава скуп тачака (дводимензионог или тродимензионог) еуклидског простора, имплицитно подразумева и све оне чињенице елементарне геометрије на које смо навикли, а које ћемо користити без доказа (при чему се докази свакако могу извести из аксиома).

У школској геометрији, вектор се уводи на визуелан начин, а често га замишљамо као дуж са стрелицом, односно као усмерену дуж. Међутим, како желимо да појам вектора уведемо ригорозно, неопходно је да посегнемо за апстрактнијим и самим тим компликованијим дефиницијама.

Уобичајено, полазимо од скупа $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ уређених парова тачака еуклидског простора $\mathbb{E}$, при чему обично посматрамо просторе димензије два (раван) или три (про-

¹Еуклид из Александрије, Εὐκλείδης (3. и 4. век п.н.е), грчки математичар

стор). Елементи скупа $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ су **двотачке**, а за њих уводимо релацију еквиваленције на следећи начин. Кажемо да је двотачка $(A, B) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ у релацији **еквиваленције** са двотачком $(C, D) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ уколико дужи AD и BC имају заједничко средиште, што означавамо са $(A, B) \sim (C, D)$. Иако се дуж стандардно дефинише за две различите тачке, у смислу наше дефиниције конвенцијом ћемо дозволити појављивање истих тачака и сматрати да дуж AA има средиште A .

Из еуклидске геометрије је познато да је четвороугао паралелограм ако и само ако му се дијагонале полове. То нас наводи да помислимо да $(A, B) \sim (C, D)$ суштински значи да је $ABDC$ паралелограм. Како дефиниција паралелограма подразумева да су његова темена различите тачке, као и да се праве одређене његовим странама не преклапају, то је важно приметити да наша релација еквиваленције лепо покрива и такве дегенерисане случајеве, односно дозвољава да све четири тачке A , B , C и D буду колинеарне.



Интуитивно можемо рећи да су двотачке (A, B) и (C, D) у релацији ако постоји translација простора $\mathbb{E}$ која тачку A пресликава у тачку C , а тачку B пресликава у тачку D . Међутим, појам translације је више механички него геометријски, а строга дефиниција је заправо заснована на концепту вектора. То је и разлог зашто наша званична дефиниција избегава механичке концепте.

Рефлексивност и симетричност релације еквиваленције је очигледна из саме дефиниције, те је важно испитати њену транзитивност. У еуклидској геометрији је позната Варињонова² теорема која каже да средишта страница произвољног четвороугла (не нужно раванског) чине паралелограм. Доказ ове теореме је једноставан и базира се на уочавању парова средњих линија троуглова који имају исту основицу, одакле следи паралелност у паровима.

Штавише, дискусијом дегенерисаних случајева, ова теорема се може уопштити за четири произвољне тачке, али се тада и појам паралелограма треба схватити уопштено. Тако долазимо до уопштене Варињонове теореме која каже да за произвољне тачке $A, B, C, D \in \mathbb{E}$ важи да се дуж чија су темена средишта дужи AB и CD и дуж чија су темена средишта дужи AC и BD међусобно полове.

Претпоставимо да важи $(A, B) \sim (C, D)$ и $(C, D) \sim (E, F)$, те нека је M заједничко средиште дужи AD и BC , N заједничко средиште дужи CF и DE , P средиште дужи BE , Q средиште дужи AF и R средиште дужи AB . Примена уопштене Варињонове теореме на A, B, D, E доноси да се дужи RN и MP полове, док примена на A, B, F, C доноси да се дужи RN и QM полове. Одавде лако следи $P = Q$, те се дужи AF и BE полове, што даје $(A, B) \sim (E, F)$ и доказује наредну лему.

Лема 1.1. *Релација еквиваленције је релација еквиваленције.*

Релација еквиваленције је дефинисана на скупу $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ и раставља га на дисјунктне подскупе које називамо класама еквиваленције. Свака класа еквиваленције састоји се од двотачака које су све међусобно у релацији, што нам омогућава да уведемо појам вектора као што је то урадио Белавитис³ 1835. године [7]. **Вектор** је класа еквиваленције добијена сечењем скупа свих двотачака $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ по релацији еквиваленције.

²Pierre Varignon (1654–1722), француски математичар

³Giusto Bellavitis (1803–1880), италијански математичар и сенатор

Вектор, односно класа еквиваленције, којем припада двотачка (A, B) једноставно обележавамо са

$$\overrightarrow{AB} = [(A, B)] = \{(X, Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E} : (X, Y) \sim (A, B)\}$$

и кажемо да је (A, B) један **вектор представник** вектора $\overrightarrow{AB}$. Посебно се истиче вектор чији је вектор представник двотачка (A, A) , зовемо га **нула вектор** и обележавамо са

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}.$$

Нека су (A, B) и (C, D) вектори представници неког вектора $\vec{v} \in \mathcal{V}$. Тада дужи AD и BC имају заједничко средиште. У општем случају $ABDC$ је паралелограм, те су дужи AB и CD подударне. Штавише, лако се види да та подударност дужи важи и у дегенерисаним случајевима кад су тачке A, B, C, D колинеарне. То нас мотивише да дефинишемо **норму (дужину, интензитет)** вектора $\vec{v}$ као ненегативан реални број $\|\vec{v}\| \in \mathbb{R}$ који је једнак дужини дужи коју одређују тачке неког вектора представника од $\vec{v}$, што је број који не зависи од избора вектора представника.

Нула вектор очигледно има норму једнаку нули, $\|\vec{0}\| = 0$, и он је једини вектор са таквом особином. Сви остали вектори су **ненула** вектори и они поред норме имају и смер који их карактерише.

Нека је (A, B) вектор представник неког ненула вектора $\vec{v} \in \mathcal{V}$. Тада је $A \neq B$ и двотачка (A, B) одређује полуправу $[A, B)$ чији је почетак тачка A и која садржи тачку B . За други вектор представник (C, D) од $\vec{v}$ имамо уопштени паралелограм $ABDC$, те осим подударности дужи AB и CD можемо закључити и паралелност полуправих $[A, B)$ и $[C, D)$.

Та паралелност полуправих значи да су су праве AB и CD паралелне, при чему су B и D са исте стране праве AC ако је $C \notin AB$, односно унија тих полуправих је такође полуправа ако је $C \in AB$. Паралелност полуправих је заправо основна паралелност која се уводи још у апсолутној геометрији (пре увођења аксиоме паралелности). Уколико тачке A, B, C, D нису колинеарне, онда паралелност полуправих $[A, B)$ и $[C, D)$ заправо каже да је четвороугао $ABDC$ (конвексан) трапез.

Смер ненула вектора чији је вектор представник (A, B) одређује полуправа $[A, B)$, односно њена паралелност и као што смо се уверили он не зависи од избора вектора представника. Кажемо да су ненула вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ **истог смера** уколико су полуправе $[A, B)$ и $[C, D)$ паралелне. Нешто блажи услов захтева само паралелност правих AB и CD , те тада кажемо да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ **истог правца**. За векторе истог правца кажемо и да су **колинеарни**, при чему додатно по конвенцији сма-трамо да је нула вектор колинеаран са сваким вектором. Ако су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ истог правца, али не и истог смера, кажемо да су они **супротивног смера**.

Уколико два ненула вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ имају једнаке норме и исти смер, онда је $ABDC$ уопштени паралелограм, те добијамо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, а самим тим и наредну теорему о карактеризацији вектора која је у складу са нашом геометријском интуицијом.

Теорема 1.2. *Ненула вектор је једнозначно одређен нормом и смером.*

Транзитивност релације еквиваленције смо доказали користећи Варињонову теорему и карактеризацију паралелограма $ABDC$ која каже да је права AB паралелна са правом CD и права AC паралелна са правом BD . Уколико искористимо новоустановљену карактеризацију по којој је дуж AB подударна дужи CD и полуправа $[A, B)$ паралелна полуправој $[C, D)$, транзитивност еквиваленције је директна последица транзитивности подударности дужи и транзитивности паралелности полуправих. Иако је ова друга карактеризација боља у смислу да захтевамо само $A \neq B$, ипак није јасно како бисмо директно извукли транзитивност паралелности полуправих без неке варијанте Варињонове теореме.

Вектор је класа еквиваленције релације еквиполенције, а скуп свих вектора на еуклидском простору $\mathbb{E}$ означавамо са

$$\mathcal{V} = (\mathbb{E} \times \mathbb{E}) / \sim = \{\overrightarrow{XY} : (X, Y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}\}.$$

На скупу $\mathcal{V}$ можемо увести операцију сабирања и операцију множења скаларом, али најпре нам је потребан пар помоћних тврђења.

Лема 1.3. *За сваку тачку $A \in \mathbb{E}$ и сваки вектор $\vec{v} \in \mathcal{V}$ постоји јединствена тачка $B \in \mathbb{E}$ таква да је $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.*

Доказ. Ако је $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ за неке $C, D \in \mathbb{E}$, тада је тачка B јединствена тачка која је (централно) симетрична тачки C у односу на средиште дужи AD . $\square$

Лема 1.4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ако и само ако је $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Доказ. Очигледна последица симетрије у дефиницији релације еквиполенције. $\square$

По Леми 1.3 сваки вектор можемо изразити преко вектора представника који почиње произвољном тачком, те следећа дефиниција даје збир и за свака два произвољна вектора. **Збир вектора** $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ је вектор

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Ова дефиниција је добра јер за $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$, по Леми 1.4 имамо $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, одакле је $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'}$, што опет по Леми 1.4 даје $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$, и коначно $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$.

Умножак вектора $\vec{v} \in \mathcal{V}$ скаларом $\alpha \in \mathbb{R}$ је вектор $\alpha \cdot \vec{v} \in \mathcal{V}$ чија норма износи

$$\|\alpha \cdot \vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|,$$

док за $\vec{v} \neq \vec{0}$ важи да су вектори $\vec{v}$ и $\alpha \cdot \vec{v}$ истог смера у случају $\alpha > 0$, односно супротног смера у случају $\alpha < 0$.

Претходна дефиниција најпре одређује норму за $\alpha \cdot \vec{v}$, те уколико је она нула (за $\alpha = 0$ или $\vec{v} = \vec{0}$), једнозначно имамо $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Иначе ($\alpha \neq 0$ и $\vec{v} \neq \vec{0}$) је $\alpha \cdot \vec{v}$ ненула вектор коме описујемо смер, те је једнозначно одређен на основу Теореме 1.2. У сваком случају вектор $\alpha \cdot \vec{v}$, односно краће $\alpha \vec{v}$, једнозначно је одређен што нам даје операцију множења вектора скаларом.

У специјалном случају множења са $\alpha = -1$, уводимо ознаку $-\vec{v} = (-1) \cdot \vec{v}$, и кажемо да је вектор $-\vec{v}$ **сујрошан** вектору $\vec{v}$. На пример, вектор $\overrightarrow{X\bar{Y}}$ је супротан вектору $\overrightarrow{YX}$. Збир два вектора већ имамо на располагању, док се разлика два вектора може дефинисати увођењем кратке ознаке, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

По дефиницији, вектори $\vec{u}$ и $\vec{v} = \alpha \vec{u}$ су истог правца (за $\vec{u} \neq \vec{0}$ и $\alpha \neq 0$), али важи и обрат. За векторе истог правца $\vec{u}$ и $\vec{v}$ постоји $\alpha \in \mathbb{R}$ тако да је $\vec{v} = \alpha \vec{u}$. Наиме, како су дати ненула вектори истог правца, у случају да су истог смера можемо поставити $\alpha = \|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$, односно $\alpha = -\|\vec{v}\|/\|\vec{u}\|$ у случају различитог смера, при чему ће се Теорема 1.2 побринути за остало. Тако за колинеарне векторе важи да је један од њих једнак скаларном умношку другог.

Овако дефинисане операције сабирања вектора и множења вектора скаларом су основне операције на скупу $\mathcal{V}$, а испоставља се да скуп $\mathcal{V}$ са тим операцијама има структуру векторског простора.

Теорема 1.5. Скуи $\mathcal{V}$ је векторски простор, односно за векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ и скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}; \quad (1.1)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}; \quad (1.2)$$

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}; \quad (1.3)$$

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}; \quad (1.4)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}; \quad (1.5)$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}; \quad (1.6)$$

$$\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}; \quad (1.7)$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}. \quad (1.8)$$

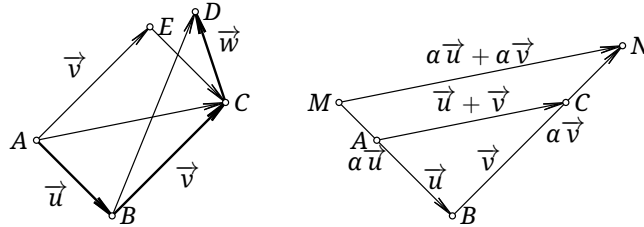
Доказ. Нека је $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (сваки вектор има свој вектор представник). По Леми 1.3 (за тачку B и вектор $\vec{v}$) постоји C тако да је $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, а затим и D тако да је $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$.

Асоцијативност (1.1) добијамо директним рачуном:

$$\begin{aligned} \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}. \end{aligned}$$

За комутативност (1.2) по Леми 1.3 уводимо тачку E тако да је $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, те по Леми 1.4 имамо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$. Сада је $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v} + \vec{u}$.

Неутрални елемент (1.3) $\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$ и инверзни елемент (1.4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ се лако виде.



За дистрибутивност у односу на сабирање вектора (1.6) уводимо тачку M тако да је $\overrightarrow{MB} = \alpha\vec{u}$ (по Леми 1.3 тако да је $\overrightarrow{BM} = -\alpha\vec{u}$) и тачку N тако да је $\overrightarrow{BN} = \alpha\vec{v}$ (поново Лема 1.3). Ако $\vec{u}$ и $\vec{v}$ нису колинеарни по Обратној Талесовој⁴ теореме (видети слику) имамо паралелност правих AC и MN , као и одговарајући однос дужина дужи потребних за $\overrightarrow{MN} = \alpha\overrightarrow{AC}$, односно важи $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$. Ако су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни, тада је $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ за неко $\lambda \in \mathbb{R}$, те се доказ своди на преостале ставке (1.5), (1.7) и (1.8).

Дистрибутивност у односу на сабирање скалара (1.5) одмах важи у случајевима $\vec{u} = \vec{0}$, $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. У супротном доказ се изводи из дефиниције сабирања дискусијом по знаковима скалара α , β и $\alpha + \beta$.

Компатибилност (1.7) очигледно важи за $\vec{u} = \vec{0}$, $\alpha = 0$ и $\beta = 0$. У супротном, због $\|\alpha(\beta\vec{u})\| = |\alpha| \cdot \|\beta\vec{u}\| = |\alpha| \cdot |\beta| \cdot \|\vec{u}\| = |\alpha\beta| \cdot \|\vec{u}\| = \|(\alpha\beta)\vec{u}\|$, вектори $\alpha(\beta\vec{u})$ и $(\alpha\beta)\vec{u}$ имају исту норму, али и исти смер (јер $\text{sgn}(\alpha\beta) = \text{sgn}(\alpha)\text{sgn}(\beta)$), те су по Теорему 1.2 они једнаки.

Јединични елемент (1.8) је број $1 \in \mathbb{R}$ у складу са дефиницијом множења скаларом и Теоремом 1.2. $\square$

⁴Талес из Милета, Θαλῆς (6. и 7. век п.н.е.), грчки филозоф и математичар

Подсетимо се неких ствари из линеарне алгебре. За скуп ненула вектора $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq \mathcal{V}$ кажемо да је **линеарно независан** уколико $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$ за $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ повлачи $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. У супротном кажемо да је он **линеарно зависан** и тада се неки од вектора може изразити као линеарна комбинација осталих. Максималан број линеарно независних вектора векторског простора је **димензија** векторског простора, а за те векторе се каже да чине **базу** векторског простора.

Теорема 1.6. Димензија векторског простора $\mathcal{V}$ једнака је димензији еуклидског простора $\mathbb{E}$.

Доказ. Нека је $\mathbb{E}$ раван ($\dim \mathbb{E} = 2$). Како у равни постоје три неколинеарне тачке K, L и M , то су вектори $\vec{KL}$ и $\vec{KM}$ неколинеарни, те су они и линеарно независни. Нека су $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ произвољни ненула вектори из равни. Поставимо тачке $A, B, P, Q \in \mathbb{E}$ тако да је $\vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AP}$ и $\vec{w} = \vec{BQ}$. Ако су праве AP и BQ паралелне то су вектори $\vec{v}$ и $\vec{w}$ колинеарни и самим тим линеарно зависни. У супротном праве AP и BQ се секу и постоји пресечна тачка C . Вектори $\vec{AP}$ и $\vec{AC}$ су колинеарни као и вектори $\vec{BQ}$ и $\vec{BC}$, те постоје скалари $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ такви да важи $\vec{AC} = \alpha \vec{AP}$ и $\vec{BC} = \beta \vec{BQ}$. Одавде добијамо $\vec{0} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{u} + \beta \vec{w} - \alpha \vec{v}$, те су вектори $\vec{u}, \vec{v}$ и $\vec{w}$ линеарно зависни, што доказује да је $\dim \mathcal{V} = 2$.

Нека је $\mathbb{E}$ простор ($\dim \mathbb{E} = 3$). Како у простору постоје четири некопланарне тачке K, L, M и N , то су вектори $\vec{KL}, \vec{KM}$ и $\vec{KN}$ некопланарни, а како је димензија равни једнака два то су они линеарно независни. Претпоставимо да постоји четири линеарно независних вектора $\vec{u} = \vec{OA}, \vec{v} = \vec{OB}, \vec{w} = \vec{OC}$ и $\vec{x} = \vec{OD}$. Из линеарне независности, OAB чини раван π , а OCD чини раван τ . Ако су равни π и τ паралелне то су једнаке ($O \in \pi \cap \tau$), вектори су копланарни и самим тим линеарно зависни. У супротном се π и τ секу по правој $p \ni O$ и постоји тачка $O \neq E \in p = \pi \cap \tau$. Вектор $\vec{OE}$ је у равни π , те $\vec{OE} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$, али и у равни τ , одакле $\vec{OE} = \gamma \vec{w} + \delta \vec{x}$. Добијамо $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} - \gamma \vec{w} - \delta \vec{x} = \vec{0}$, где сви коефицијенти нису нула (иначе је $\vec{OE} = \vec{0}$, али и $E \neq O$) те су вектори линеарно зависни, што доказује да је $\dim \mathcal{V} = 3$. $\square$

1.2 Векторска алгебра

Угао између два ненула вектора $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ је мањи од углова између полуправих $[OA)$ и $[OB)$, односно

$$\angle(\vec{OA}, \vec{OB}) = \angle AOB \in [0, \pi],$$

при чему Лема 1.3 омогућава да се појам угла прошири за произвољна два вектора. **Скаларни производ** вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је број

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R}.$$

Иако је угао између два вектора дефинисан само кад су они ненула, скаларни производ је ипак дефинисан за произвољна два вектора, јер ако је неки од њих $\vec{0}$ онда само појављивање његове норме у формули из дефиниције даје резултат 0, какогод успоставили конвенцију за угао између неког вектора и нула вектора.

Уколико је $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ кажемо да су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ (међусобно) **ортогонални** и пишемо $\vec{u} \perp \vec{v}$, што се дешава кад је $\vec{u} = \vec{0}$ или $\vec{v} = \vec{0}$ или $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$. Основне особине скаларног производа видимо у наредној теорему.

Теорема 1.7. За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}; \quad (1.9)$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}; \quad (1.10)$$

$$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}); \quad (1.11)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0, \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}. \quad (1.12)$$

Доказ. Директно из дефиниције следи комутативност (1.9), као и позитивна дефинитност (1.12). Компатибилност (1.11) се лако рачуна:

$$\begin{aligned} (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \|\alpha \vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\alpha \vec{u}, \vec{v}) \\ &= |\alpha| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

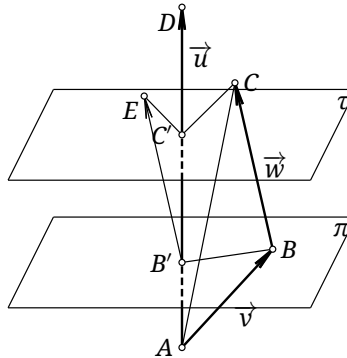
Преостаје доказати дистрибутивност (1.10) која очигледно важи за $\vec{u} = \vec{0}$, те претпостављамо $\vec{u} \neq \vec{0}$. Поставимо векторе представнике тако да важи $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$ и $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. Уведимо равни π и τ такве да важи $B \in \pi \perp AD$ и $C \in \tau \perp AD$, док B' и C' дефинишемо као нормалне пројекције тачака B и C на праву AD , односно $\{B'\} = \pi \cap AD$ и $\{C'\} = \tau \cap AD$.

Вектори $\overrightarrow{AB'}$ и $\vec{u} \neq \vec{0}$ су колинеарни, те постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\overrightarrow{AB'} = \lambda \vec{u}$. Из правоуглог троугла $AB'B$ издвајамо $\|\overrightarrow{AB'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot |\cos \angle(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})| = \|\vec{v}\| \cdot |\cos \angle(\vec{u}, \vec{v})|$ јер су углови $\angle(\overrightarrow{AB'}, \vec{v})$ и $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ једнаки или суплементни. Одавде следи

$$|\lambda| = \frac{\|\vec{v}\| \cdot |\cos \angle(\vec{u}, \vec{v})|}{\|\vec{u}\|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\|^2},$$

док је $\operatorname{sgn} \lambda = \operatorname{sgn}(\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB'}) = \operatorname{sgn}(\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB})$, те добијамо

$$\overrightarrow{AB'} = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$



Нека је E тачка дата са $\overrightarrow{B'E} = \overrightarrow{BC}$, одакле лако следи $E \in \tau$. Сасвим слично претходном извођењу из правоуглих троуглова $B'C'E$ и $AC'C$ добијамо

$$\overrightarrow{B'C'} = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}, \quad \overrightarrow{AC'} = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.$$

Обједињавањем претходних резултата, уз примену (1.5) имамо

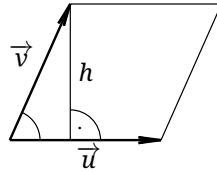
$$\frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{u} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u},$$

те изједначавање коефицијената уз $\vec{u} \neq \vec{0}$ доноси $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. $\square$

Векторски производ уводимо као бинарну операцију која векторима $\vec{u}$ и $\vec{v}$ придружује вектор. Природни захтев је да резултујући вектор буде ортогоналан на оба дата вектора. Уколико су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно независни, они разапињу раван, а резултујући вектор има правац нормале на ту раван. Како је правац нормале једнозначно одређен само у тродимензионом векторском простору, то векторски производ уводимо искључиво у случају $\dim \mathcal{V} = 3$.

Постоји бесконачно много вектора ортогоналних на $\vec{u}$ и $\vec{v}$, а фиксирање норме ће их прилично рестриковати. Природно је захтевати да норма буде једнака површини $\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$ паралелограма којег разапињу вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Висина тог паралелограма која одговара основици коју одређује $\vec{u}$ износи $h = \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$, те је

$$\mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot h = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}).$$



Након овог захтева за резултујући вектор остају две могућности јер у оквиру правца имамо два различита смера, што можемо решити увођењем појма оријентације. Нека је $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ произвољна уређена база од $\mathcal{V}$. Посматрајмо с врха вектора $\vec{z}$ обилазак од вектора $\vec{x}$ ка вектору $\vec{y}$ краћим путем. Уколико је тај обилазак у математички позитивном смеру (супротан смеру казаљке на сату) кажемо да је база **десно оријентисана**. У супротном обилазак је у математички негативном смеру и кажемо да је база **лево оријентисана**. На овај начин све уређене базе од $\mathcal{V}$ деле су у две класе еквиваленције на десно оријентисане и лево оријентисане.

Избором привилеговане базе одређује се оријентација и она је по дефиницији **позитивна**. Најчешће се за привилеговану базу узима нека десно оријентисана база, при чему су онда десно оријентисане позитивне, а лево оријентисане негативне. Користећи оријентацију долазимо до једнозначно одређеног резултујућег вектора.

Векторски производ вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ је вектор $\vec{u} \times \vec{v}$ са следећим особинама. Норма вектора $\vec{u} \times \vec{v}$ износи $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$, што је (као у дефиницији скаларног производа) добро дефинисано и једнако нули кад је неки од вектора нула вектор. Ако је $\|\vec{u} \times \vec{v}\| \neq 0$, вектор $\vec{u} \times \vec{v}$ је ортогоналан на векторе $\vec{u}$ и $\vec{v}$, али такав да је база $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ позитивно оријентисана.

Норму смо бирали тако да је $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v})$. Како је $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ само у случајевима $\vec{u} = \vec{0}$, $\vec{v} = \vec{0}$, $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ и $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, то је $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ ако и само ако су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни, а тада и немамо паралелограм разапнут са $\vec{u}$ и $\vec{v}$, односно његова површина је нула. У супротном $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно независни, ортогоналност одређује правац за $\vec{u} \times \vec{v}$, док оријентација додатно одређује смер.

Како дијагонала дели паралелограм на два подударна троугла имамо мотив да практично израчунамо површину троугла са

$$\mathcal{P}(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \mathcal{P}(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$$

Теорема 1.8. За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}); \quad (1.13)$$

$$(\alpha \vec{u}) \times \vec{v} = \alpha(\vec{u} \times \vec{v}); \quad (1.14)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}. \quad (1.15)$$

Доказ. Антикомутативност (1.13) стандардно добијамо по Теорему 1.2, јер норма и правац вектора су очигледно једнаки, док је смер постављен како треба. За (1.14) смер је очигледно једнак (или су нула вектори), те остаје само норма:

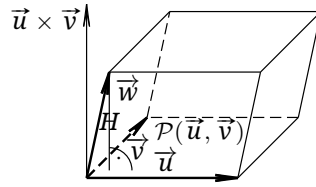
$$\begin{aligned}\|(\alpha \vec{u}) \times \vec{v}\| &= \|\alpha \vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \angle(\alpha \vec{u}, \vec{v}) = |\alpha| \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \angle(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= |\alpha| \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\alpha(\vec{u} \times \vec{v})\|.\end{aligned}$$

Доказ формуле (1.15) оставићемо за касније јер је тако једноставније. $\square$

Мешовити производ вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ је број

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

Геометријска интерпретација мешовитог производа може се видети посматрањем паралелепипеда којег разпињу вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$.



Како је $H = \|\vec{w}\| \cdot |\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})|$ висина паралелепипеда која одговара страни коју образују вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$, то имамо

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}| = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| |\cos \angle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})| = \mathcal{P}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot H,$$

што је даље једнако запремини тог паралелепипеда и отуда следећа теорема.

Теорема 1.9. Запремина паралелепипеда којег разпињу вектори $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$ једнака је

$$\mathcal{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.$$

Практичан проблем може бити рачунање запремине тетраедра. Како се паралелепипед дели на две подударне призме, а призма има три пута већу запремину од пирамиде, то у паралелепипед можемо сместити шест тетраедара и зато је запремина тетраедра $ABCD$ једнака

$$\mathcal{V}(ABCD) = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|.$$

Мешовити производ се такође лепо понаша у односу на уведене операције.

Теорема 1.10. За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in \mathcal{V}$ и скалар $\alpha \in \mathbb{R}$ важи

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]; \quad (1.16)$$

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]; \quad (1.17)$$

$$[\alpha \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \alpha [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]; \quad (1.18)$$

$$[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] + [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}]. \quad (1.19)$$

Доказ. Ако формуле (1.13) и (1.14) скаларно помножимо са $\vec{w}$ добијамо (1.16) и (1.18). Циклично померање (1.17) је последица Теореме 1.9 по којој су лева и десна страна једнаке по апсолутној вредности, док је знак једнак због једнаке оријентације на циклично помереној бази. Дистрибутивност (1.19) је последица (1.15), али смо тај доказ прескочили. Међутим, важи и обрат, јер како је $(\vec{w} \times \vec{x}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u} + \vec{v}]$ по формули (1.10) једнако $(\vec{w} \times \vec{x}) \cdot \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{x}) \cdot \vec{v} = [\vec{w}, \vec{x}, \vec{u}] + [\vec{w}, \vec{x}, \vec{v}]$, то је (1.19) последица претходно доказаног (1.17). $\square$

Из доказане особине (1.19) за свако $\vec{x}$ важи $[\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] - [\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] - [\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = 0$, што по дефиницији мешовитог производа и Теореме 1.7 доноси

$$(((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{w}) - (\vec{v} \times \vec{w})) \cdot \vec{x} = 0.$$

За конкретно $\vec{x} = ((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{w}) - (\vec{v} \times \vec{w})$ добијамо $\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2 = 0$ и отуда следи $((\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{w}) - (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{0}$, што коначно доказује (1.15) чији смо доказ раније прескочили.

Двоструки векторски производ заправо је векторско множење примењено два пута заредом, односно облик $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$. Основна идеја је да добијемо експлицитну формулу за рачунање овог израза. У случају да су вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ колинеарни то је $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ и самим тим $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{0}$, те претпостављамо да су $\vec{u}$ и $\vec{v}$ линеарно независни. Тада је $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$, те вектори $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ чине једну базу векторског простора $\mathcal{V}$. Посматрајмо израз $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}$ који расписујемо у наведеној бази

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma (\vec{u} \times \vec{v}).$$

Скаларним множењем са вектором $(\vec{u} \times \vec{v})$ који је нормалан на $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}$, на $\vec{u}$ и на $\vec{v}$, одмах добијамо $\gamma \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = 0$, односно $\gamma = 0$, те имамо

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}. \quad (1.20)$$

Векторским множењем са $\vec{u}$, из (1.20) је $((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u} = \alpha(\vec{u} \times \vec{u}) + \beta(\vec{v} \times \vec{u})$, односно

$$((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u} = -\beta(\vec{u} \times \vec{v}).$$

Пажљивим посматрањем вектора на левој страни претходног израза који је једнак двоструком векторском производу међусобно ортогоналних вектора $((\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$, те $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} \perp \vec{u}$) можемо закључити да је истог смера као и вектор $-(\vec{u} \times \vec{v})$, што нам даје $\beta > 0$. Са друге стране, упоређујући норме леве и десне стране имамо

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\|^2 = \|((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) \times \vec{u}\| = \|-\beta(\vec{u} \times \vec{v})\| = |\beta| \cdot \|\vec{u} \times \vec{v}\|,$$

одакле је $|\beta| = \|\vec{u}\|^2$ и самим тим, због $\beta > 0$ добијамо $\beta = \|\vec{u}\|^2$.

Скаларним множењем са $\vec{u}$, из (1.20) добијамо $0 = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{u})$, одакле следи да је $\alpha \|\vec{u}\|^2 = -\|\vec{u}\|^2(\vec{u} \cdot \vec{v})$ и коначно $\alpha = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$. Заменом α и β у (1.20) имамо

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v}, \quad (1.21)$$

док нам симетрија по $\vec{u}$ и $\vec{v}$ даје $(\vec{v} \times \vec{u}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u}$, односно

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v} = -(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v}. \quad (1.22)$$

Преостаје да у рачун укључимо и вектор $\vec{w}$ који се такође може расписати у нашој бази са $\vec{w} = \mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi(\vec{u} \times \vec{v})$. Применом особина векторског производа из Теореме 1.8, користећи формуле (1.21) и (1.22), као и чињеницу да је $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0}$, добијамо

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} &= \mu((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{u}) + \nu((\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{v}) + \xi((\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})) \\ &= -\mu(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{u} + \mu(\vec{u} \cdot \vec{u})\vec{v} - \nu(\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u} + \nu(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} \\ &= -(\mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{v}))\vec{u} + (\mu(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu(\vec{u} \cdot \vec{v}))\vec{v}. \end{aligned}$$

Међутим, скаларним множењем једначине $\vec{w} = \mu \vec{u} + \nu \vec{v} + \xi(\vec{u} \times \vec{v})$ са $\vec{u}$ и $\vec{v}$ добијамо $\vec{w} \cdot \vec{u} = \mu(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{u})$, односно $\vec{w} \cdot \vec{v} = \mu(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \nu(\vec{v} \cdot \vec{v})$, те имамо двоструки векторски производ $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -(\vec{w} \cdot \vec{v})\vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\vec{v}$ у виду експлицитне формуле.

Преостаје провера добијене формуле у случају линеарно зависних вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Ако је $\vec{u} = \vec{0}$ или $\vec{v} = \vec{0}$ ствар је очигледна. У супротном имамо $\vec{v} = \kappa \vec{u}$, те важи $\vec{0} = -(\vec{w} \cdot (\kappa \vec{u}))\vec{u} + (\vec{w} \cdot \vec{u})\kappa \vec{u}$, што комплетира наредну теорему.

Теорема 1.11. За векторе $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ важи

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}. \quad (1.23)$$

1.3 Координате вектора и тачака

Ако је $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ произвољна база векторског простора $\mathcal{V}$ тада за свако $\vec{x} \in \mathcal{V}$ постоје једнозначно одређени скалари $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ за које важи $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$. Ти коефицијенти $[\vec{x}]_e = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ су **координате вектора** $\vec{x}$ у датој бази e , што успоставља бијекцију између векторских простора $\mathcal{V}$ и $\mathbb{R}^n$.

Често се ствари једноставније записују у матричном облику, где базу e доживљавамо као врста матрицу, а координате вектора као колона матрицу, те се директна веза може записати са

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n = (\vec{e}_1 \quad \dots \quad \vec{e}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = e \cdot [\vec{x}]_e.$$

Основна особина базе је да су два вектора једнака ако и само у истој бази имају једнаке координате. Из особина Теореме 1.5 се види да је координата суме вектора једнака суми одговарајућих координата, као и да је координата умношка вектора скаларом једнака производу скалара и одговарајуће координате. Другим речима, за свако $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{V}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи

$$[\vec{x} + \vec{y}]_e = [\vec{x}]_e + [\vec{y}]_e, \quad [\alpha \vec{x}]_e = \alpha \cdot [\vec{x}]_e.$$

Размотримо како се у нашем тродимензионом векторском простору $\mathcal{V}$ понаша векторска алгебра у координатама. Кажемо да је база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ за $\mathcal{V}$ **ортонормирана** ако су сви базни вектори јединични и међусобно ортогонални, односно уколико за скаларни производ важи

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{за } i = j, \\ 0, & \text{за } i \neq j. \end{cases}$$

где је δ_{ij} Кронекеров симбол и износи 1 за $i = j$, односно 0 за $i \neq j$. Ортонормиране базе су лепше јер значајно поједностављују рачуне, а из линеарне алгебре је познат Грам–Шмитов поступак ортогонализације који од произвољне базе векторског простора који је снабдевен скаларним производом генерише ортонормирану базу.

Нека је $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ фиксирана ортонормирана база векторског простора $\mathcal{V}$. За произвољне векторе $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$ из $\mathcal{V}$, на основу Теореме 1.7 имамо

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\sum_i x_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j y_j \vec{e}_j \right) = \sum_{ij} x_i y_j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = \sum_{ij} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_i x_i y_i.$$

Добијамо да у ортонормираној бази важи

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

док саму координату x_i вектора $\vec{x}$ можемо добити скаларним множењем са одговарајућим базним вектором, $\vec{x} \cdot \vec{e}_i = x_i$.

За векторски производ неопходна је оријентација, те стандардно претпостављамо да је ортонормирана база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ позитивно оријентисана. Вектор $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ има норму $\|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\| = \|\vec{e}_1\| \|\vec{e}_2\| = 1$, али и правац ортогоналан и на $\vec{e}_1$ и на $\vec{e}_2$, што је правац вектора $\vec{e}_3$. Како је $\|\vec{e}_3\| = 1$, а база $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ позитивно оријентисана, то је јасно да важи $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. Сасвим слично добијамо цикличне једначине $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ и $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$. Ако променимо редослед множења, то по (1.13) имамо $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$,

$\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ и $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$, док множење линеарно зависних вектора даје нулу, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$.

Тако смо израчунали векторске производе базних вектора, те користећи особине из Теореме 1.8 лако је извести општи рачун

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} &= \left(\sum_i x_i \vec{e}_i \right) \times \left(\sum_j y_j \vec{e}_j \right) = \sum_{ij} x_i y_j (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \\ &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3,\end{aligned}$$

што одговара формалној детерминанти

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

коју је лако запамтити.

Мешовити производ $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$ рачунамо по дефиницији $[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$, те ако додатно поставимо $\vec{z} = z_1 \vec{e}_1 + z_2 \vec{e}_2 + z_3 \vec{e}_3$, по претходно установљеном је

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} z_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} z_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} z_3,$$

што се такође лако памти као детерминанта,

$$[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Нека је $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ произвољна база за $\mathcal{V}$. Ако уведемо нову базу $e' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ за $\mathcal{V}$, природно се намеће питање везе између старих и нових координата приликом промене базе. Нови базни вектори су вектори простора $\mathcal{V}$ и самим тим могу се изразити у старој бази e , те нека је

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \gamma_{11} \vec{e}_1 + \gamma_{21} \vec{e}_2 + \gamma_{31} \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= \gamma_{12} \vec{e}_1 + \gamma_{22} \vec{e}_2 + \gamma_{32} \vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= \gamma_{13} \vec{e}_1 + \gamma_{23} \vec{e}_2 + \gamma_{33} \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Одговарајуће коефицијенте уписујемо у колоне матрице

$$\Gamma = \Gamma_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

која се зове **матрица преласка** са базе e на базу e' , што се матрично може записати са $e' = e \cdot \Gamma$.

Након што произвољан вектор $\vec{x}$ изразимо у обе базе, у матричном облику добијемо $e \cdot [\vec{x}]_e = \vec{x} = e' \cdot [\vec{x}]_{e'} = e \cdot \Gamma \cdot [\vec{x}]_{e'}$, те како је e база следи $[\vec{x}]_e = \Gamma \cdot [\vec{x}]_{e'}$. То заправо значи да ако нове базне векторе изражавамо преко старих користећи неку матрицу преласка, онда се старе координате $[\vec{x}]_e = (x_1, x_2, x_3)$ изражавају преко нових $[\vec{x}]_{e'} = (x'_1, x'_2, x'_3)$ користећи ту исту матрицу,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Уколико су базе e и e' ортонормиране можемо рачунати скаларни производ $\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j$ на два начина

$$\begin{aligned}\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j &= \left(\sum_k \gamma_{ki} \vec{e}_k \right) \cdot \vec{e}_j = \sum_k \gamma_{ki} (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j) = \sum_k \gamma_{ki} \delta_{kj} = \gamma_{ji} \\ &= \vec{e}_i' \cdot \left(\sum_k \gamma'_{kj} \vec{e}_k' \right) = \sum_k \gamma'_{kj} (\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_k') = \sum_k \gamma'_{kj} \delta_{ik} = \gamma'_{ij},\end{aligned}$$

где су γ'_{ij} елементи инверзне матрице од Γ , што је матрица преласка са базе e' на e . Одавде закључујемо да важи $\gamma_{ji} = \gamma'_{ij}$, односно да је матрица преласка ортогонална, што значи да је њен инверз једнак њеном транспонату. За детерминанту матрице преласка имамо

$$1 = \det \mathbb{1} = \det(\Gamma \cdot \Gamma^{-1}) = \det(\Gamma \cdot \Gamma^T) = \det(\Gamma) \cdot \det(\Gamma^T) = (\det(\Gamma))^2,$$

што нам доноси $\det \Gamma = \pm 1$.

Са друге стране, координате тачака описујемо у **координатном систему** (O, e) , који се састоји од неке одабране тачке $O \in \mathbb{E}$ коју зовемо **координатни њочейак** и неке базе $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ простора $\mathcal{V}$. Свакој тачки $M \in \mathbb{E}$ једнозначно придружујемо вектор $\vec{OM} \in \mathcal{V}$, што је њен **вектор њоложаја**. **Координате тачке** M су координате њеног вектора положаја у односу на задату базу, односно важи $[M]_{Oe} = [\vec{OM}]_e$.

Ако су вектори базе јединични кажемо да је координатни систем **Декартов**, а ако су међусобно управни кажемо да је он **правоули**. Најчешће рачуне изводимо у правоуглом Декартовом координатном систему, што значи да је одабрана база ортонормирана.

Ако уведемо нови координатни систем (O', e') , тада из везе $\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}$ добијамо $[M]_{Oe} = [\vec{OM}]_e = [\vec{OO'}]_e + [\vec{O'M}]_e = [O']_{Oe} + \Gamma_{e \rightarrow e'} [\vec{O'M}]_{e'}$, одакле следи да су старе координате неке тачке једнаке збиру старих координата тачке O' и нових координата те исте тачке умножених матрицом преласка са старе базе на нову,

$$[M]_{Oe} = [O']_{Oe} + \Gamma_{e \rightarrow e'} \cdot [M]_{O'e'}.$$

1.4 Права и раван

Нека је (O, e) неки фиксиран координатни систем у којем ћемо спроводити наше рачуне. Нека су $A(a_1, a_2, a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$ различите тачке које су дате својим координатама. Аксиоме еуклидске геометрије кажу да је права једнозначно одређена са две различите тачке, те нека је $p = AB$ права одређена са A и B . Тачка X припада правој p (тачке A, B и X су колинеарне) ако су вектори $\vec{AX}$ и $\vec{AB}$ колинеарни, односно уколико постоји скалар $\kappa \in \mathbb{R}$ такав да је $\vec{AX} = \kappa \vec{AB}$. Претходна једначина гласи $\vec{OX} - \vec{OA} = \kappa(\vec{OB} - \vec{OA})$, одакле изједначавањем координата добијамо $x_i - a_i = \kappa(b_i - a_i)$ за $i = 1, 2, 3$.

Вектор $\vec{AB}$ са координатама $\vec{u}_p = (v_1, v_2, v_3) = [\vec{AB}]_e = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ одређује правац праве p , те добијамо **параметарске једначине праве**

$$x_1 = a_1 + \kappa v_1, \quad x_2 = a_2 + \kappa v_2, \quad x_3 = a_3 + \kappa v_3,$$

одакле се види да је права једнозначно одређена неком својом тачком $A \in p$ и тим правцем. Приметимо да је вектор правца праве p било који од умножака вектора $\vec{u}_p$ ненула скаларом и самим тим није једнозначно одређен. Када параметар κ прође скуп реалних бројева претходне једначине описују све тачке $X(x_1, x_2, x_3)$ са праве p .

Из параметарских једначина елиминацијом параметра k , заправо његовим изражавањем, добијамо **канонске једначине њправе**

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}.$$

Важно је разумети да канонске једначине заправо представљају скраћени запис параметарских једначина, што значи да се дозвољава да неки од бројева v_i буде нула, док је забрањено једино $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ јер $\vec{0}$ није вектор правца неке праве.

Раван је аксиомама еуклидске геометрије одређена са три неколинеарне тачке A, B и C . По узору на претходну дискусију раван τ можемо одредити неком тачком A и са два линеарно независна вектора $\vec{u} = \vec{AB}$ и $\vec{v} = \vec{AC}$. Тачка X припада равни ако се њен вектор положаја у односу на A може видети као линеарна комбинација вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, односно ако постоје скалари $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ такви да је $\vec{AX} = \kappa\vec{u} + \lambda\vec{v}$. Расписивањем ове једначине у координатама, за $[\vec{u}]_e = (u_1, u_2, u_3)$ и $[\vec{v}]_e = (v_1, v_2, v_3)$ добијамо **параметарске једначине равни**,

$$x_1 = a_1 + \kappa u_1 + \lambda v_1, \quad x_2 = a_2 + \kappa u_2 + \lambda v_2, \quad x_3 = a_3 + \kappa u_3 + \lambda v_3.$$

Међутим, раван τ се лакше може записати уколико уместо вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$ искористимо вектор нормале $\vec{n}_\tau = \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Приметимо да је вектор нормале равни τ било који од умножака вектора $\vec{n}_\tau$ ненула скаларом и самим тим није једнозначно одређен. Релација $\kappa\vec{u} + \lambda\vec{v} \perp \vec{n}$ доноси **векторску једначину равни** $\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$.

Векторска једначина равни се расписује са $(\vec{OX} - \vec{OA}) \cdot \vec{n} = 0$, те ако су координате тачака и вектора дате са $[A]_{oe} = (a_1, a_2, a_3)$, $[X]_{oe} = (x_1, x_2, x_3)$ и $[\vec{n}]_e = (n_1, n_2, n_3)$, добијамо једначину равни $n_1(x_1 - a_1) + n_2(x_2 - a_2) + n_3(x_3 - a_3) = 0$. Добијена линеарна једначина

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0,$$

при чему је $n_4 = -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$, зове се **опшћа једначина равни**.

У дводимензионом векторском простору ствари су једноставније. По узору на простор, у равни можемо написати параметарске једначине праве са једном мање димензијом, $x_1 = a_1 + \kappa v_1$, $x_2 = a_2 + \kappa v_2$. Множењем прве једначине са v_2 , друге са v_1 и њиховим одузимањем добијамо $x_1v_2 - x_2v_1 = a_1v_2 - a_2v_1$. Увођењем нових ознака $n_1 = v_2$, $n_2 = -v_1$ и $n_3 = -(a_1v_2 - a_2v_1)$, добијамо **опшћу једначину њправе у равни**,

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0. \quad (1.24)$$

До ове једначине може се доћи и на други начин. На пример, права у равни је одређена тачком $A(a_1, a_2)$ и вектором нормале $\vec{n}(n_1, n_2)$, те по узору на векторску једначину равни у простору добијамо $\vec{AX} \cdot \vec{n} = 0$. Упоређивањем тако добијених једначина следи да ако је (v_1, v_2) вектор правца праве онда је њен вектор нормале $\vec{n}(n_1, n_2)$ сразмеран вектору $(v_2, -v_1)$.

Општа једначина праве је важна јер се свака права у равни може изразити на такав начин. Са друге стране, у случају да је $n_2 \neq 0$, односно $v_1 \neq 0$, читаву једначину можемо поделити са n_2 и добити **експлицитну једначину њправе**

$$x_2 = kx_1 + n,$$

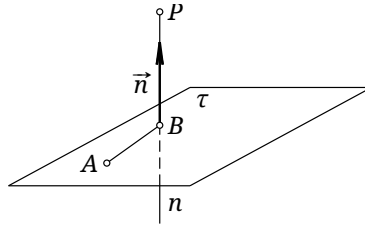
где је $k = -n_1/n_2$ и $n = -n_3/n_2$. Број k из експлицитне једначине праве зове се **ко-ефицијент њправца** или **најиб** праве и једнак је тангенсу угла који права гради са позитивним делом x_1 осе. Међутим, не треба испустити из вида да вертикалне праве имају константно x_1 и зато немају експлицитан облик.

1.5 Растојања и углови

Нека је $\mathbb{E}$ тродимензиони простор у којем смо фиксирали неки правоугли Декартов координатни систем. Нека је раван τ дата једначином $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$, а тачка $P(p_1, p_2, p_3)$ својим координатама. Размотримо питање растојања од тачке P до равни τ ,

$$d(P, \tau) = \inf_{X \in \tau} d(P, X) = \inf_{X \in \tau} \|\overrightarrow{PX}\|.$$

Нека је n права која пролази кроз тачку P која је нормална на раван τ , а B подножје те нормале, односно тачка таква да је $\{B\} = n \cap \tau$. Како је $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BX}$ са $\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{BX}$, то скаларни производ (Питагорина теорема) даје $\|\overrightarrow{PX}\|^2 = \|\overrightarrow{PB}\|^2 + \|\overrightarrow{BX}\|^2 \geq \|\overrightarrow{PB}\|^2$, што значи да се инфимум достиже у тачки B и важи $d(P, \tau) = \|\overrightarrow{PB}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$.



Нека је $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ вектор правца праве n ($\vec{n} = \vec{u}_n$) и вектор нормале равни τ ($\vec{n} = \vec{n}_\tau$). Како $B, P \in n$ то су вектори $\overrightarrow{BP}$ и $\vec{n}$ колинеарни, те је $\cos \angle(\overrightarrow{BP}, \vec{n}) \in \{-1, 1\}$, одакле следи $|\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{BP}\| \cdot \|\vec{n}\|$. Ако је $A(a_1, a_2, a_3)$ нека тачка равни τ , тада је $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$, што доноси

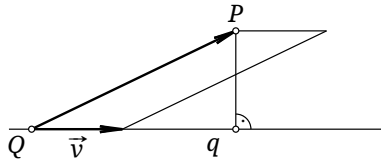
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} \cdot \vec{n} &= \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} \\ &= \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} - \overrightarrow{OA} \cdot \vec{n} = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 - a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3. \end{aligned}$$

Како је $n_4 = -a_1n_1 - a_2n_2 - a_3n_3$, то због $A \in \tau$ имамо $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4$. Обједињавањем резултата добијамо $\|\overrightarrow{BP}\| \cdot \|\vec{n}\| = |p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4|$, а како важи $\|\vec{n}\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$, то добијамо следећу теорему.

Теорема 1.12. *Растојање тачке $P(p_1, p_2, p_3)$ од равни $\tau: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4 = 0$ износи*

$$d(P, \tau) = \frac{|p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3 + n_4|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Претпоставимо да је права q одређена тачком Q и правцем $\vec{v} = \vec{u}_q$. Ако поставимо паралелограм који разапињу вектори $\overrightarrow{QP}$ и $\vec{v}$ тада се растојање тачке P од праве q може видети као његова висина. Површину тог паралелограма можемо изразити на два начина, геометријски $\mathcal{P}(\overrightarrow{QP}, \vec{v}) = \|\vec{v}\| \cdot d(P, q)$ и алгебарски $\mathcal{P}(\overrightarrow{QP}, \vec{v}) = \|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\|$. Изједначавањем површина добијамо наредну теорему.



Теорема 1.13. *Растојање тачке P од праве q која има правац $\vec{v}$ и садржи тачку Q износи*

$$d(P, q) = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Наравно, ако имамо конкретне координате $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ и $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, претходну теорему, можемо експлицитно расписати са

$$d(P, q) = \frac{\sqrt{\left| \begin{matrix} p_2 - q_2 & p_3 - q_3 \\ v_2 & v_3 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} p_1 - q_1 & p_3 - q_3 \\ v_1 & v_3 \end{matrix} \right|^2 + \left| \begin{matrix} p_1 - q_1 & p_2 - q_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right|^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}.$$

Растојање тачке од праве у равни може се посматрати као блажа варијанта претходних теорема. Наиме, растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $l: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у равни, поистовећујемо са растојањем тачке $(p_1, p_2, 0)$ од равни $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у простору, јер се оба растојања реализују дуж исте нормале. Применом Теореме 1.12 добијамо одговарајуће тврђење.

Теорема 1.14. *Растојање тачке $P(p_1, p_2)$ од праве $l: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3 = 0$ у равни износи*

$$d(P, l) = \frac{|p_1n_1 + p_2n_2 + n_3|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

Мимоилазне праве су праве у простору које не припадају једној равни, односно нити се секу нити су паралелне. Познато је да за две мимоилазне праве постоји тачно једна права која их сече и нормална је на њих. Та права назива се **заједничка нормала** мимоилазних правих.

Конструкција заједничке нормале за мимоилазне праве p и q може се извршити на следећи начин. Како заједничка нормала мора бити нормална и на правац праве p и на правац праве q то мора бити нормална на раван π која садржи p , а паралелна је са q и на раван τ која садржи q , а паралелна је са p . Све потенцијалне нормале налазиће се у равни која садржи p и нормална је на раван π , као и у равни која садржи q и нормална је на раван τ , те је самим тим заједничка нормала пресек тих двеју равни.

Растојање између мимоилазних правих реализује се дуж заједничке нормале. Наиме, ако је MN заједничка нормала за праве $p \ni M$ и $q \ni N$, то за $X \in p$ и $Y \in q$ важи $\vec{XY} = \vec{XM} + \vec{NY} + \vec{MN}$, те из $\vec{XM}, \vec{NY} \perp \vec{MN}$ следи $\|\vec{XY}\|^2 = \|\vec{XM} + \vec{NY}\|^2 + \|\vec{MN}\|^2 \geq \|\vec{MN}\|^2$ и коначно $d(p, q) = \inf_{X \in p, Y \in q} \|\vec{XY}\| = \|\vec{MN}\|$.

Нека је права p одређена тачком P и правцем $\vec{u}_p$, а права q одређена тачком Q и правцем $\vec{u}_q$. Заједничка нормала MN представља висину паралелепипеда којег разапињу вектори $\vec{PQ}$, $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$ у односу на базу коју разапињу вектори $\vec{u}_p$ и $\vec{u}_q$. Запремина паралелепипеда геометријски износи $\mathcal{V}(\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q) = \|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\| \cdot d(p, q)$, док је то алгебарски $\mathcal{V}(\vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q) = |\langle \vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q \rangle|$. Одавде добијамо експлицитну формулу

$$d(p, q) = \frac{|\langle \vec{PQ}, \vec{u}_p, \vec{u}_q \rangle|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}.$$

Угао је један од основних појмова у геометрији. Угао између полуправих је већ разматран у дефиницији угла између два вектора, док преостаје да једначинама интерпретирамо угао између две праве, угао између праве и равни, као и угао између две равни.

Угао између две праве p и q је мањи од углова које одређују њихове полуправе. Тако је $\angle(p, q) \in [0, \pi/2]$, при чему су углови $\angle(p, q)$ и $\angle(\vec{u}_p, \vec{u}_q)$ једнаки или суплементни, одакле следи $|\cos \angle(\vec{u}_p, \vec{u}_q)| = \cos \angle(p, q)$, што даје

$$|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q| = \|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\| \cdot \cos \angle(p, q).$$

Угао између праве p и равни τ је угао између праве p и њене ортогоналне пројекције на раван τ . Тај угао, или њему суплементан, видимо у правоуглом троуглу који

чине хипотенузу $\vec{u}_p$ и наспрамна катета $\vec{n}_\tau$. Зато је $|\cos \angle(\vec{u}_p, \vec{n}_\tau)| = \cos(\pi/2 - \angle(p, \tau))$, одакле добијамо

$$|\vec{u}_p \cdot \vec{n}_\tau| = \|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{n}_\tau\| \cdot \sin \angle(p, \tau).$$

Угао између две равни τ и σ једнак је углу између њихових нормала, те је зато

$$|\vec{n}_\tau \cdot \vec{n}_\sigma| = \|\vec{n}_\tau\| \cdot \|\vec{n}_\sigma\| \cdot \cos \angle(\tau, \sigma).$$

1.6 Поларне координате

Нека је наш оперативни простор $\mathbb{E}$ дводимензиони. Најједноставнији објекат у равни, после праве, јесте круг. **Круи** је скуп свих тачака равни подједнако удаљених од неке тачке. Круг чије су тачке на растојању r од тачке S обележавамо са $k(S, r)$ и кажемо да је S **центиар** круга k , а r његов **йолуиречник**.

Јасно је да се круг $k(S, r)$ може описати једначином $\|\vec{SX}\| = r$. У фиксираном правоуглом Декартовом координатном систему, ако је произвољна тачка круга $X(x_1, x_2)$, а његов центар $S(s_1, s_2)$, долазимо до једначине

$$(x_1 - s_1)^2 + (x_2 - s_2)^2 = r^2.$$

На пример, јединични центрирани (центар му је координатни почетак O) круг $k(O, 1)$ има једначину $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Круг се може записати и у параметарском облику, а једноставна параметризација круга $k(O, 1)$ гласи $x_1 = \cos \theta$, $x_2 = \sin \theta$, за $\theta \in [0, 2\pi)$. Правоугли Декартов координатни систем је најједноставнији, а и најпогоднији за изражавање линеарних елемената (права, раван). Међутим, за неке квадратне елементе, попут круга, погодније је увести другачији координатни систем.

Поларни координатни систем је координатни систем у равни ($\dim \mathbb{E} = 2$) који карактерише тачка $O \in \mathbb{E}$ коју зовемо **йол** и полуправа $[Ox_1)$ са почетком O коју зовемо **оса**. Тачка $X \in \mathbb{E}$ различита од O једнозначно је одређена растојањем $r > 0$ од пола ($r = d(O, X)$) и оријентисаним углом θ који полуправа $[OX)$ заклапа са осом $[Ox_1)$. **Поларне координате** чини уређен пар (r, θ) , при чему угао θ одговара било ком од углова $\theta + 2n\pi$ за цео број n . Тачку O довољно описује $r = 0$ и у том случају угао θ не постоји.

Веома важна је веза поларног са правоуглим Декартовим координатним системом. Ако га поставимо тако да се пол O поклопи са координатним почетком, а поларну осу поклопимо са x_1 осом имамо директну везу

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta.$$

Обратне везе је такође лако исписати. Увек је

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

док у зависности од тога да ли је $x_1 \neq 0$ или $x_2 \neq 0$ можемо писати

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x_2}{x_1}, \quad \operatorname{ctg} \theta = \frac{x_1}{x_2}.$$

На пример, за $x_1 \neq 0$ можемо записати формулу

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} + \frac{\pi}{2}(1 - \operatorname{sgn}(x_1)).$$

Приметимо да јединични центрирани круг $k(O, 1)$, који у правоуглом Декартовом систему има једначину $x_1^2 + x_2^2 = 1$, у поларном координатном систему има веома једноставну једначину $r = 1$.

Геометријске трансформације равни су пресликавања равни $\mathbb{E}$ на саму себе. Оне геометријске трансформације које не померају тачку O могу се једноставно изразити у поларном координатном систему са полом O . Погледајмо шта су слике неке тачке (r, θ) при неким познатим трансформацијама.

Слика при ротацији око тачке O за угао α је тачка $(r, \theta + \alpha)$. Централна симетрија са центром O даје слику $(r, \theta + \pi)$. Осна симетрија у односу на x_1 даје слику $(r, -\theta)$. Осна симетрија у односу на праву кроз O која је под углом α у односу на x_1 даје слику $(r, 2\alpha - \theta)$. Хомотетија са центром O и коефицијентом $k > 0$ даје слику (kr, θ) .

Поларне координате могу нам олакшати пут ка једначинама неких трансформација у правоуглим Декартовим координатама. На пример, поменута ротација око тачке O за угао α представља пресликавање $(r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$ у поларним координатама. Ако је то пресликавање у правоуглим Декартовим координатама записано са $(x_1, x_2) \mapsto (x'_1, x'_2)$, лако добијамо једначине

$$\begin{aligned}x'_1 &= r' \cos \theta' = r \cos(\theta + \alpha) = r(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha \\x'_2 &= r' \sin \theta' = r \sin(\theta + \alpha) = r(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha,\end{aligned}$$

те су једначине ротације

$$x'_1 = x_1 \cos \alpha - x_2 \sin \alpha, \quad x'_2 = x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha. \quad (1.25)$$

1.7 Конике

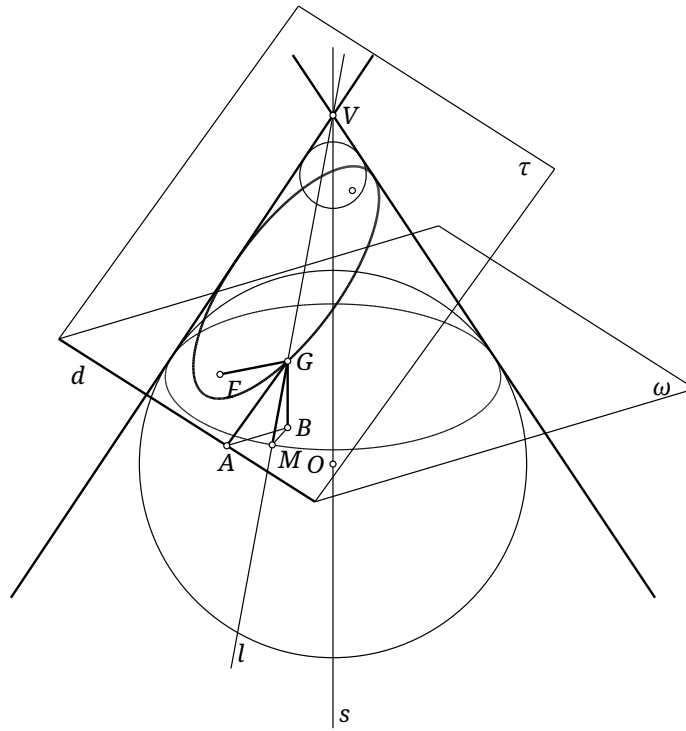
Нека су l и s праве у простору које се секу под оштрим углом у тачки V . **Прави кружни конус** добија се ротацијом праве l око s , односно у питању је унија правих кроз V које са s заклапају баш онолики (оштар) угао колики l заклапа са s . Права s назива се **оса**, тачка V је **врх**, док су права l као и њене слике у ротацији **изводнице** правог кружног конуса.

Конусни пресек је пресек правог кружног конуса и неке равни. Случај кад раван садржи врх V је дегенерисан и у питању може бити само тачка V , једна изводница или две изводнице. Најинтересантнији случај догађа се у случају да раван не пролази кроз врх нити је нормална на осу (ако јесте у пресеку добијамо круг), а такви пресеци називају се **конике**.

Нека је $\mathcal{K}$ прави кружни конус са осом s , врхом V и изводницом l , а τ произвољна раван која не садржи V и није нормална на s . Није тешко показати да постоји сфера σ која је уписана у $\mathcal{K}$ и која додирује раван τ . Штавише, у општем случају (елипса, хипербола) постоје две такве сфере, али ако је раван τ паралелна некој изводници (случај параболе) постоји само једна таква сфера. Ове сфере се зову **Данделинове сфере**⁵ и омогућавају нам да укажемо на неке лепе особине коника.

Сфера σ додирује конус $\mathcal{K}$ по неком кругу и нека је ω раван у којој се тај круг налази. Раван ω је очигледно нормална на s , за разлику од равни τ , те се оне секу по правој $d = \omega \cap \tau$. Посматрајмо конику $\Gamma = \mathcal{K} \cap \tau$ и неку произвољну тачку са ње $G \in \Gamma$. Нека је A подножје нормале из G на d , а B подножје нормале из G на ω . Продор праве VG кроз ω означимо са M , а важно је приметити да се M налази на кругу из равни ω .

⁵Germinal Pierre Dandelin (1794–1847), француски математичар



Како је угао између равни ω и равни τ једнак $\angle GAB$, из правоуглог троугла ABG рачунамо растојање тачке G од праве d са

$$d(G, d) = \|\vec{GA}\| = \frac{\|\vec{GB}\|}{\sin \angle(\omega, \tau)}.$$

Са друге стране, како је GB нормално на ω то је и паралелно са s , одакле следи да је угао $\angle BGM = \angle(s, VM)$ једнак углу између s и било које изводнице, односно $\angle(s, l)$. Тангентни одсечци на сферу су међусобно подударни, те имамо подударне дужи GF и GM , где је F додирна тачка сфере σ и равни τ , $\{F\} = \tau \cap \sigma$. Из правоуглог троугла MBG следи

$$d(G, F) = \|\vec{GM}\| = \frac{\|\vec{GB}\|}{\cos \angle(s, l)}.$$

Обједињавањем претходних једначина добијамо одговарајући однос

$$\frac{d(G, F)}{d(G, d)} = \frac{\|\vec{GM}\|}{\|\vec{GA}\|} = \frac{\sin \angle(\omega, \tau)}{\cos \angle(s, l)} = e,$$

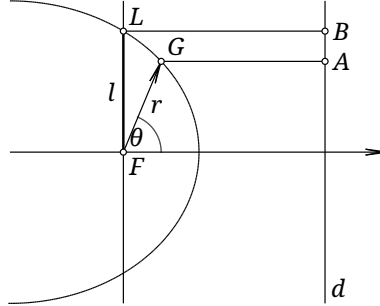
који не зависи од избора тачке G са конике Γ , јер фиксирањем конуса $\mathcal{K}$ и равни τ фиксирани су и углови $\angle(\omega, \tau)$ и $\angle(s, l)$, што доказује наредну теорему.

Теорема 1.15. *За сваку конику Γ у равни постоји тачка F и права d таква да је однос растојања произвољне тачке са конике од тачке F , односно од праве d , константан.*

Тачка F зове се **жижга** (или **фокус**), права d зове се **водиља** (или **директриса**), а број e је **ексцентрицитет** конике. Ексцентрицитет конике је по дефиницији строго позитиван, а испоставља се да вредност 1 разлучује три типа коника на следећи начин. Коника је за $0 < e < 1$ **елипса**, за $e = 1$ **парабола**, за $e > 1$ **хипербола**.

Иако смо конике дефинисали као објекте у тродимензионом простору, оне се суштински налазе у равни. Теорема 1.15 омогућава да без коришћења треће димензије изведемо једначине коника у равни.

Испоставља се да је до једначина лакше доћи у поларном координатном систему. Поставимо координатни систем тако да је жижа F пол, док је поларна оса полуправа са почетком F која је нормална на директрису d и сече је. Са L означимо једну од пресечних тачака конике Γ и праве кроз F паралелне директриси и нека је $l = d(F, L)$. Посматрајмо произвољну тачку са конике $G \in \Gamma$ која је са исте стране праве d као и тачка F . Нека је A подножје нормале из G , а B подножје нормале из L на праву d .



Ако су (r, θ) поларне координате тачке G , тада важи

$$r = d(F, G) = e \cdot d(G, A) = e(d(L, B) - r \cdot \cos \theta) = l - er \cos \theta,$$

одакле добијамо поларну једначину конике

$$r = l - er \cos \theta, \quad (1.26)$$

што се може записати и са

$$r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}.$$

Уколико поставимо одговарајући правоугли Декартов координатни систем (који има почетак у полу, а поларна оса се преклапа са осом x_1), једноставно долазимо до једначина конике. Квадрирањем једначине (1.26) уз стандардне везе $x_1 = r \cos \theta$ и $x_2 = r \sin \theta$, добијамо

$$x_1^2 + x_2^2 = (l - ex_1)^2,$$

што се може расписати са

$$(1 - e^2)x_1^2 + 2elx_1 + x_2^2 = l^2. \quad (1.27)$$

Приметимо да је неопходно извршити дискусију по томе да ли је $1 - e^2 = 0$. У случају да је $e \neq 1$ важи

$$x_1^2 + 2x_1 \frac{el}{1 - e^2} + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{l^2}{1 - e^2},$$

одакле је

$$\left(x_1 + \frac{el}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{l^2}{1 - e^2} + \frac{e^2 l^2}{(1 - e^2)^2} = \frac{l^2}{(1 - e^2)^2}.$$

Претходна једначина нас мотивише да уведемо доста згоднији координатни систем који добијамо транслацијом за вектор $(-el/(1 - e^2), 0)$, јер тада $x_1 + el/(1 - e^2)$ постаје ново x_1 , док се x_2 не мења. У том новом координатном систему претходна једначина гласи

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{1 - e^2} = \frac{l^2}{(1 - e^2)^2},$$

односно

$$\frac{x_1^2}{\frac{l^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{x_2^2}{\frac{l^2}{(1 - e^2)}} = 1.$$

Ако уведемо ознаке

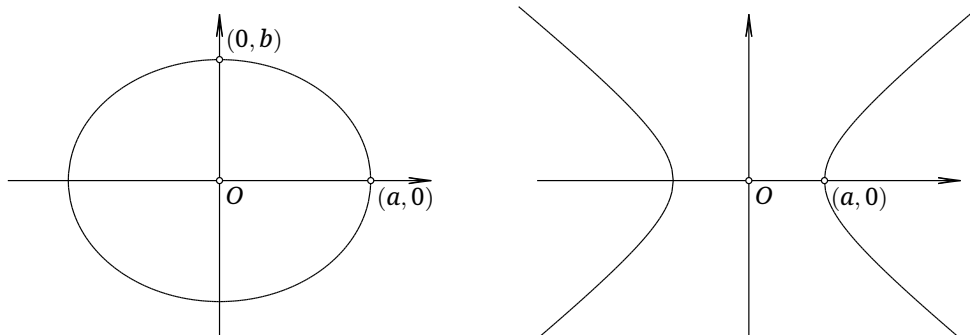
$$a = \frac{l}{|1 - e^2|}, \quad b = \frac{l}{\sqrt{|1 - e^2|}},$$

долазимо до одговарајуће канонске једначине

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \operatorname{sgn}(1 - e^2) \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Разматран случај ($e \neq 1$) решава проблем елипсе ($e < 1$) и хиперболе ($e > 1$), где канонске једначине редом гласе

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

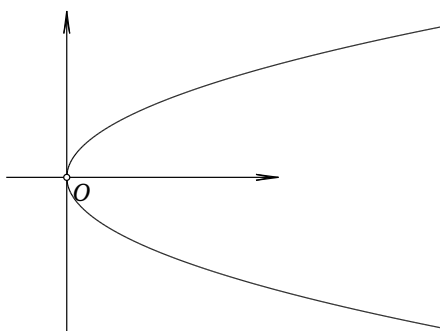


Преостаје случај параболе, који карактерише услов $e = 1$ у почетној дискусији. Једначина (1.27) тада гласи $2lx_1 + x_2^2 = l^2$, што се може записати са

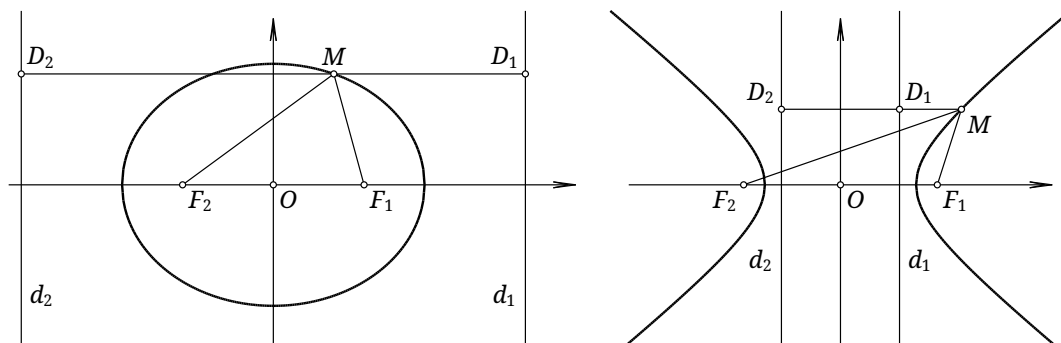
$$x_2^2 = 2l \left(\frac{l}{2} - x_1 \right).$$

Додатна изометријска трансформација која представља осну симетрију равни у односу на праву $x_1 = l/4$ мења $l/2 - x_1$ новим x_1 , док се x_2 не мења. Коначно, у новом координатном систему једначина параболе добија свој канонски облик

$$x_2^2 = 2lx_1.$$



Елипсе и хиперболе имају две жиже и две директрисе. Жиже елипсе налазе се између директриса, док су у случају хиперболе директрисе између жижа. По Теорему 1.15 за сваку од жижа важи да је однос растојања тачке од жиже и од директрисе једнак ексцентрицитету.



Нека је M произвољна тачка са елипсе или хиперболе Γ и нека су F_1 и F_2 жиже чије су одговарајуће директрисе d_1 и d_2 . Нека су тачке $D_1 \in d_1$ и $D_2 \in d_2$ подножја нормала из M на d_1 и d_2 . Из особине коника важи $d(M, F_i) = e \cdot d(M, d_i) = e \cdot d(M, D_i)$ за $i = 1, 2$. У случају елипсе ова растојања сабирамо и добијамо

$$d(M, F_1) + d(M, F_2) = e(d(M, D_1) + d(M, D_2)) = e \cdot d(D_1, D_2) = e \cdot d(d_1, d_2),$$

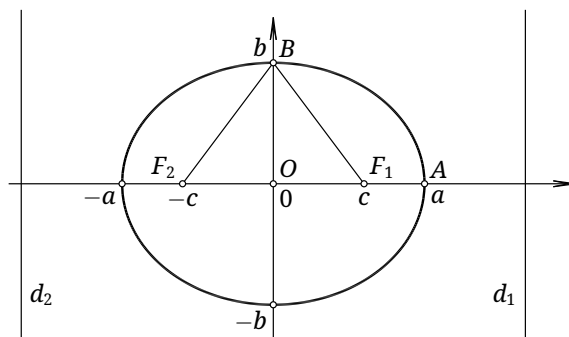
док их у случају хиперболе одузимамо

$$|d(M, F_1) - d(M, F_2)| = e|d(M, D_1) - d(M, D_2)| = e \cdot d(D_1, D_2) = e \cdot d(d_1, d_2).$$

Десна страна претходних једначина је константа јер не зависи од избора $M \in \Gamma$, те добијамо наредну теорему.

Теорема 1.16. *Збир растојања сваке тачке елипсе до њених жижа је константа. Айсолутина вредност разлике растојања сваке тачке хиперболе до њених жижа је константа.*

Претходна теорема омогућава да израчунамо ексцентрицитет e преко основних параметара конике (који се виде у канонској једначини). Растојање (било које) жиже од центра конике зове се **линеарни ексцентрицитет** и обично обележава са c . Приликом извођења канонских једначина коника имали смо транслацију за вектор $(-el/(1 - e^2), 0)$, која помера жижу из координатног почетка, те добијамо везу између линеарног и обичног ексцентрицитета, $c = |el/(1 - e^2)| = el/|1 - e^2| = ea$. Како за ексцентрицитет важи $e = c/a$, најпре рачунамо везу између бројева a и b из канонске једначине (такозвани велики и мали полупречник) и броја c , али је неопходно посебно дискутовати елипсу и хиперболу.

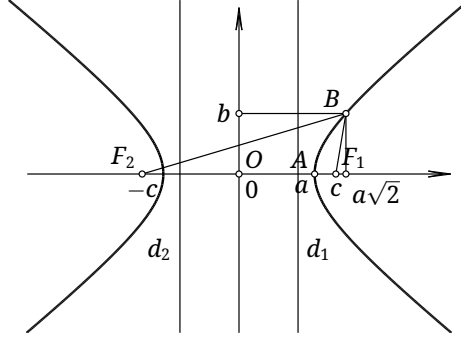


Ако је коника елипса која има канонску једначину $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, а постављена тако да важи $a > b$, тада су њене жиже $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$. Теорему 1.16 примењујемо на темена елипсе, односно на тачке $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ са конике које се налазе на осама. Са једне стране је $d(A, F_1) + d(A, F_2) = (a - c) + (a + c) = 2a$, док са друге стране важи

$d(B, F_1) + d(B, F_2) = 2\sqrt{b^2 + c^2}$, одакле добијамо $c^2 = a^2 - b^2$. Тако долазимо до тражених веза,

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Важно је напоменути да се у случају $a < b$ жиже налазе на x_2 -оси (а не на x_1 -оси), односно имају облик $(0, \pm c)$, док је $c = \sqrt{b^2 - a^2}$. Уколико објединимо случајеве можемо рећи да важи $c = \sqrt{|a^2 - b^2|}$ Уз стандардно $e = c/a$



Слично решавамо случај хиперболе $x_1^2/a^2 - x_2^2/b^2 = 1$, где узимамо тачке $A(a, 0)$ и $B(a\sqrt{2}, b)$. Тада је $|d(A, F_1) - d(A, F_2)| = |(c - a) - (c + a)| = 2a$, али и доста компликованије

$$|d(B, F_1) - d(B, F_2)| = \left| \sqrt{(a\sqrt{2} - c)^2 + b^2} - \sqrt{(a\sqrt{2} + c)^2 + b^2} \right|.$$

Применом Теореме 1.16 на тачке A и B , те квадрирањем добијамо

$$4a^2 = (a\sqrt{2} - c)^2 + b^2 + (a\sqrt{2} + c)^2 + b^2 - 2\sqrt{(a\sqrt{2} - c)^2 + b^2}\sqrt{(a\sqrt{2} + c)^2 + b^2},$$

одакле следи

$$4a^2 = 4a^2 + 2c^2 + 2b^2 - 2\sqrt{(2a^2 + c^2 + b^2)^2 - (2ac\sqrt{2})^2},$$

што повлачи

$$c^2 + b^2 = \sqrt{(2a^2 + c^2 + b^2)^2 - 8a^2c^2}.$$

Квадрирањем претходне једначине добијамо

$$c^4 + 2c^2b^2 + b^4 = 4a^4 + c^4 + b^4 + 4a^2c^2 + 4a^2b^2 + 2c^2b^2 - 8a^2c^2,$$

што даје $4a^4 - 4a^2c^2 + 4a^2b^2 = 0$, одакле дељењем са $4a^2 \neq 0$ имамо $c^2 = a^2 + b^2$. Тако долазимо до важних веза у случају хиперболе,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

1.8 Криве другог реда

Крива другог реда је скуп тачака равни $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину

$$f(x_1, x_2) = 0, \quad (1.28)$$

где је f полином другог степена по x_1 и x_2 са реалним коефицијентима. Другим речима, важи

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}, \quad (1.29)$$

где су $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33} \in \mathbb{R}$, при чему је $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$ (постоји барем један квадратни члан). Циљ којем тежимо је класификација кривих другог реда, односно желимо да геометријски опишемо све могуће скупоове тачака који задовољавају једначину (1.28).

Уколико постоји члан $a_{12} \neq 0$, то геометријски значи да је крива некако искошена у постојећем координатном систему. Идеја је да потражимо нови координатни систем у којем ће она бити исправљена, односно нема члан a_{12} . То можемо постићи ротацијом координатног система око координатног почетка за неки угао $\theta \in \mathbb{R}$ (односно ротацијом тачака око координатног почетка за угао $-\theta$), при чему нам једначине ротације (1.25) омогућавају везу

$$x_1 = x'_1 \cos \theta - x'_2 \sin \theta, \quad x_2 = x'_1 \sin \theta + x'_2 \cos \theta. \quad (1.30)$$

На овај начин, једначина криве (1.28) (у пакету са (1.29)) се ротацијом трансформише у нову једначину

$$a'_{11}x_1'^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}x_2'^2 + 2a'_{13}x'_1 + 2a'_{23}x'_2 + a'_{33} = 0, \quad (1.31)$$

где је $2a'_{12} = -2a_{11} \cos \theta \sin \theta + 2a_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2a_{22} \cos \theta \sin \theta$. Одавде је

$$a'_{12} = a_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \cos \theta \sin \theta,$$

што због тригонометријских формула $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ и $2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$ постаје

$$a'_{12} = a_{12} \cos 2\theta + (a_{22} - a_{11}) \frac{1}{2} \sin 2\theta.$$

Потребно нам је такво θ које ће анулирати коефицијент a'_{12} , али из претходне једначине је очигледно да се то дешава за

$$\operatorname{ctg} 2\theta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Приметимо да овде немамо проблем дељења нулом, јер је у случају $a_{12} = 0$ крива већ исправљена, те је непотребно ротирати. Дакле, ако координатни систем заротирамо за угао

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccotg} \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \quad (1.32)$$

око координатног почетка, једначина (1.28) прелази у једначину (1.31) за коју имамо $a'_{12} = 0$. На овај начин уклонили смо један коефицијент једначине криве, те даље посматрамо криву чија једначина има општи облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \quad (1.33)$$

Како више нема микс члана, променљиве x_1 и x_2 су раздвојене, те за $i = 1, 2$ уколико је $a_{ii} \neq 0$, можемо посматрати израз $a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i$. Тада се стандардно извлачи a_{ii} испред заграде, у којој се креира потпун квадрат на следећи начин

$$a_{ii}x_i^2 + 2a_{i3}x_i = a_{ii} \left(x_i^2 + 2x_i \frac{a_{i3}}{a_{ii}} + \left(\frac{a_{i3}}{a_{ii}} \right)^2 \right) - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}} = a_{ii} \left(x_i + \frac{a_{i3}}{a_{ii}} \right)^2 - \frac{a_{i3}^2}{a_{ii}}.$$

Овога пута транслирамо x_i координату са $x'_i = x_i + a_{i3}/a_{ii}$, што суштински уклања коефицијент уз x_i , односно анулира a_{i3} . Наравно, уколико нема квадрата због $a_{ii} = 0$ тада већ имамо један коефицијент мање.

Веома је важно да су трансформације које примењујемо изометријске трансформације, односно да оне чувају дужину дужи, или еквивалентно скаларни производ.

Због тога је било битно извући a_{ii} испред заграде у претходном кораку. У сваком случају ротација и транслагација јесу изометријске трансформације и то су прва два корака у третману којим криву доводимо до канонског облика.

На раније описан начин, из опште једначине (1.33) уклањамо још два коефицијента, али је неопходно дискутовати случајеве. Уколико оба квадратна коефицијента нису нула, $a_{11}a_{22} \neq 0$, тада транслагација $x_1 = x'_1 - a_{13}/a_{11}$, $x_2 = x'_2 - a_{23}/a_{22}$ елиминисе линеарне коефицијенте из једначине (1.33) која након тога добија облик

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0. \quad (1.34)$$

У првој варијанти квадратни коефицијенти су истог знака, $a_{11}a_{22} > 0$, те дискутујемо знак од a_{33} . Ако се знакови разликују, $a_{11}a_{33} < 0$, уводимо $a = \sqrt{-a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{-a_{33}/a_{22}}$, одакле добијамо

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

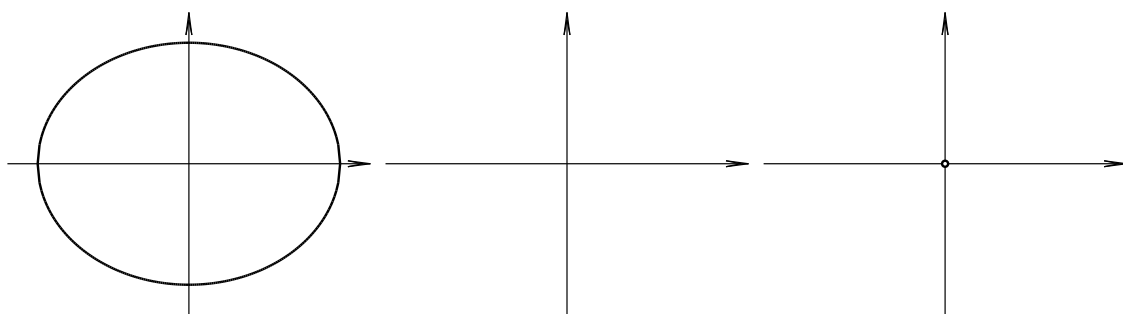
што је канонска једначина **елипсе**. У овом случају додатно можемо захтевати услов $a \geq b > 0$ (посебно за $a = b$ имамо круг као специјални случај елипсе), јер у супротном изометријска трансформација $x_1 = x'_2$, $x_2 = x'_1$ је осна рефлексија у односу на праву $x_1 = x_2$ која окреће координате x_1 и x_2 , те самим тим и бројеви a и b мењају места. Ако су сви коефицијенти истог знака, $a_{11}a_{33} > 0$, тада за $a = \sqrt{a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{a_{33}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1,$$

а како збир квадрата никад није негативан, нема тачака које ће је задовољити. Ова крива је **празан скуп**, али суштински у питању је *имагинарна елипса*, што се види ако проблем посматрамо у комплексној равни. Преостаје случај $a_{33} = 0$ који за $a = 1$ и $b = \sqrt{a_{11}/a_{22}}$ даје једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0,$$

коју испуњава само координатни почетак, те је у питању **тачка**. Проблем се може посматрати и у комплексној равни где је решење *пар имагинарних правих које се секу* баш у тој реалној тачки.



У другој варијанти квадратни коефицијенти су различитог знака, $a_{11}a_{22} < 0$, те дискутујемо знак од a_{33} . Ако је $a_{33} \neq 0$, не умањујући општост можемо претпоставити да важи $a_{11}a_{33} < 0$, јер иначе примена већ виђене осне рефлексије $x_1 = x'_2$, $x_2 = x'_1$

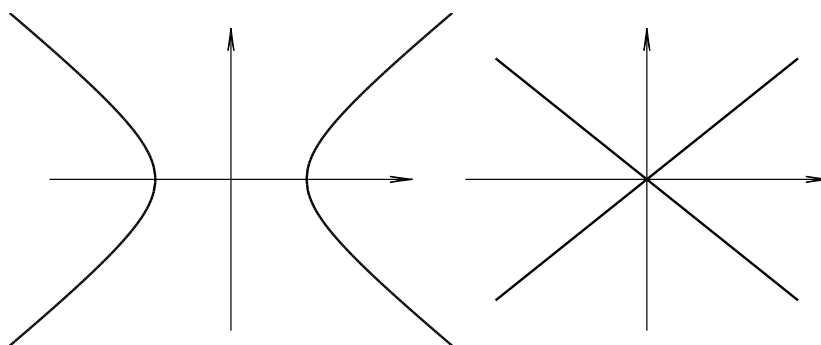
размењује координатне осе, самим тим и квадратне коефицијенте. За $a = \sqrt{-a_{33}/a_{11}}$ и $b = \sqrt{a_{33}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

што је канонска једначина **хиперболе**. У случају $a_{33} = 0$ за $a = 1$ и $b = \sqrt{-a_{11}/a_{22}}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,$$

која представља **две праве које се секу**. Једначине тих правих су $x_1/a \pm x_2/b = 0$.



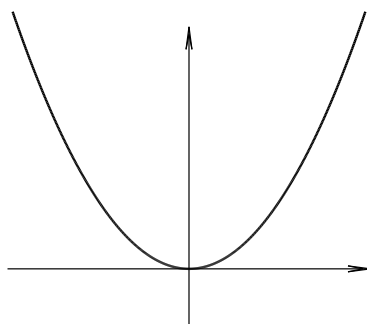
Овим смо исцрпили могућности из једначине (1.34) која је проистекла из услова $a_{11}a_{22} \neq 0$. Како испитујемо криву другог реда, она мора имати барем један квадратни члан, те преостаје случај кад је тачно један од квадратних коефицијената различит од нуле. Не умањујући општост, можемо претпоставити да је $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$, иначе, као и раније, користимо осну рефлексију да разменимо x_1 и x_2 осу. Тада трансформација $x_1 = x'_1 - a_{13}/a_{11}$, $x_2 = x'_2$ елиминише коефицијент a_{13} и једначина (1.33) постаје

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0. \quad (1.35)$$

У првој варијанти имамо $a_{23} \neq 0$. Додатна трансформација $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2 - a_{33}/(2a_{23})$ уклања слободан члан a_{33} , те једначина (1.35) добија облик $a_{11}x_1^2 + 2a_{23}x_2 = 0$. Једноставна смена $p = -a_{23}/a_{11}$ доноси

$$x_1^2 = 2px_2,$$

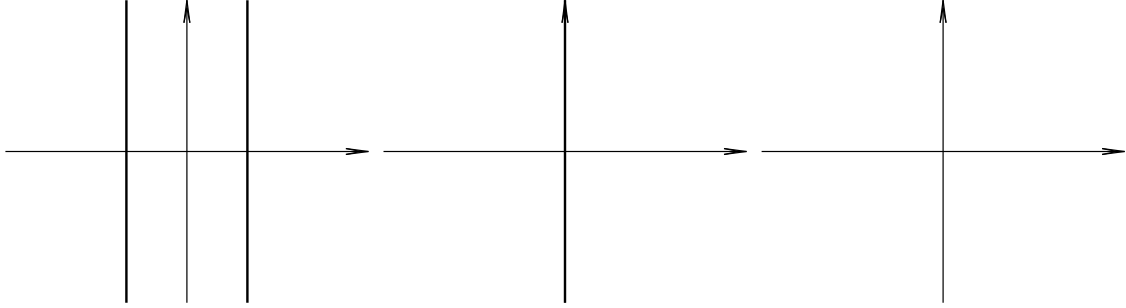
што је једначина **параболе**. Уколико је $p < 0$ додатно можемо окренути смер x_2 оси тако што применимо изометријску трансформацију $x_1 = x'_1$, $x_2 = -x'_2$, која ће обезбедити канонско ограничење $p > 0$.



У последњој варијанти је $a_{23} = 0$. Једначина (1.35) је тада облика $a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$, односно

$$x_1^2 = c,$$

што дискутујемо по $c = -a_{33}/a_{11}$. Уколико је $c > 0$ у питању су **паралелне праве** $x_1 = \pm\sqrt{c}$, док $c = 0$ даје једну **праву** $x_1 = 0$. У случају $c < 0$ једначина нема решења, односно у питању је **празан скуп**, што у комплексној равни представља *две њаралелне имаинарне љраве*.



1.9 Инваријанте кривих другог реда

По дефиницији, крива другог реда задовољава једначину

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0,$$

која се може записати у матричном облику са

$$(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a_{33} = 0,$$

односно са

$$(x_1 \ x_2 \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ради лакшег записа, уводимо краће ознаке за матрице из претходних једначина на следећи начин,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Тада једначина криве гласи

$$\bar{X}^T \bar{A} \bar{X} = 0,$$

док за квадратну форму важи

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = X^T A X.$$

Приликом свођења криве на канонски облик најпре смо имали ротацију за угао (1.32) јер смо установили да она елиминише a_{12} и тако исправља криву. Овај геометријски поступак можемо посматрати алгебарски тако што ротацију схватимо као дијагонализацију симетричне матрице A . У ту сврху потребно је да испитамо сопствену структуру произвољне симетричне квадратне матрице A , при чему смо ову теорију из линеарне алгебре додатно разрадили у Секцији А.1.

По Лемми А.2, свака сопствена вредност λ симетричне квадратне матрице A је реална ($\lambda \in \mathbb{R}$), а како важи $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$, то хомогена једначина $(A - \lambda \mathbb{1})V = 0$ има бесконачно много решења. Због тога, увек постоји сопствени вектор ($V \neq 0$) који одговара сопственој вредности λ . Међутим, он никад није једнозначно одређен, јер свако $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ генерише сопствени вектор αV . Често радимо са јединичним сопственим векторима, а добијамо их скалирањем једним од два могућа избора ($\alpha = 1/\|V\|$ или $\alpha = -1/\|V\|$) за αV , где је V неки пронађени сопствени вектор.

Посматрајмо симетричну квадратну матрицу A реда два из формуле (1.36). Ако су λ_1 и λ_2 нуле њеног карактеристичног полинома, тада је

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Ако матрица A има само једну сопствену вредност, $\lambda_1 = \lambda_2$, тада важи $a_{11} + a_{22} = 2\lambda_1$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1^2$, одакле добијамо $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0$. Из претходне једначине следи $a_{12} = 0$, те је матрица дијагонална, што геометријски значи да је крива већ исправљена и нема потребе за ротацијом.

Закључујемо да ако има потребе за ротацијом ($a_{12} \neq 0$), важи $\lambda_1 \neq \lambda_2$, те постоје јединични сопствени вектори који им одговарају, а они су по Лемми А.3 међусобно ортогонални. Нека је $V = (v_1, v_2)$ јединични сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности λ_1 , односно нека важи $AV = \lambda_1 V$ уз $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Тада је вектор $W = (-v_2, v_1)$ јединични и ортогоналан на V , те самим тим он мора бити сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_2 , односно важи $AW = \lambda_2 W$.

Основна идеја је пронаћи ортонормирану базу која се састоји само из сопствених вектора и поставити те векторе у колоне матрице преласка. Конкретно, постављамо матрицу

$$M = (V|W) = \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}$$

која има улогу матрице ротације из (1.30), што доноси трансформацију $X = MX'$. Квадратна форма након трансформације постаје $X^T A X = (MX')^T A (MX') = X'^T (M^T A M) X'$, односно зависи од нове симетричне матрице $A' = M^T A M$. Како су V и W јединични и међусобно ортогонални, то је нова матрица дијагонална

$$A' = (V|W)^T A (V|W) = (V|W)^T (AV|AW) = (V|W)^T (\lambda_1 V | \lambda_2 W) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

На овај начин смо прилично брзо дијагонализовали симетричну матрицу и тако исправили криву, јер квадратна форма $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ након трансформације постаје $\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$. Применом овог поступка тачно се зна како изгледа квадратни део једначине после ротације и не морамо га посебно рачунати. Коефицијенти који се појављују уз квадратне чланове исправљене криве нужно морају бити нуле карактеристичног полинома, а њихов редослед директно зависи од редоследа којим смо сопствене векторе стављали у матрицу преласка M .

Упознали смо трансформацију $X = MX'$, где је M матрица која се састоји из вектора неке ортонормиране базе. Таква матрица је ортогонална, за њу важи $MM^T = \mathbb{1}$, те и $(\det M)^2 = 1$. Та трансформација квадратну форму $X^T A X = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ преводи у $X'^T A' X'$, где је $A' = M^T A M$ симетрична матрица нове квадратне форме. Једноставан рачун за карактеристични полином нове матрице,

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda \mathbb{1}) = \det(M^T A M - M^T (\lambda \mathbb{1}) M) = \det(M^T (A - \lambda \mathbb{1}) M) \\ &= \det M^T \det(A - \lambda \mathbb{1}) \det M = (\det M)^2 \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \chi_A(\lambda), \end{aligned}$$

показује да се карактеристични полином не мења приликом ове трансформације, односно да је њена инваријанта. Међутим, како су $\text{tr } A$ и $\det A$ коефицијенти карактеристичног полинома

$$\chi_{A'}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A,$$

то су и траг и детерминанта матрице квадратне форме такође инваријанте.

Сасвим слично можемо посматрати симетричну матрицу $\bar{A}$ реда три коју смо дефинисали формулом (1.36) и трансформацију $\bar{X} = \bar{M}\bar{X}'$, где је

$$\bar{M} = \left(\begin{array}{cc|c} M & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

такође ортогонална матрица. Исти аргументи као раније обезбедиће инваријантност карактеристичног полинома,

$$\chi_{\bar{A}'}(\lambda) = \chi_{\bar{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + (\text{tr } \bar{A})\lambda^2 - \frac{1}{2}((\text{tr } \bar{A})^2 - \text{tr}(\bar{A}^2))\lambda + \det \bar{A},$$

самим тим и његових коефицијената. Иако смо заинтересовани за детерминанту матрице криве другог реда, није неопходно да докажемо претходну формулу, јер се инваријантност директно види из $\det \bar{A}' = \det(\bar{M}^T \bar{A} \bar{M}) = (\det \bar{M})^2 \det \bar{A} = \det \bar{A}$. У сваком случају имамо добре разлоге да дефинишемо величине Δ , D и T на следећи начин,

$$\Delta = \det \bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad T = \text{tr } A = a_{11} + a_{22},$$

јер су оне инваријанте трансформације која је одређена ортогоналном матрицом.

Најчешће се ова трансформација конкретизује као ротација

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

коју смо већ видели у формули (1.30). Та ротација се види у матричним једначинама $X = MX'$ и $\bar{X} = \bar{M}\bar{X}'$, где су M и $\bar{M}$ ортогоналне матрице дате са

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Промена матрице $\bar{A}$ приликом те ротације може се пажљиво израчунати у складу са једначином криве (1.31),

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11} \cos^2 \theta + a_{22} \sin^2 \theta + 2a_{12} \cos \theta \sin \theta, \\ a'_{12} &= a_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \cos \theta \sin \theta, \\ a'_{22} &= a_{11} \sin^2 \theta + a_{22} \cos^2 \theta - 2a_{12} \cos \theta \sin \theta, \\ a'_{13} &= a_{13} \cos \theta + a_{23} \sin \theta, \\ a'_{23} &= a_{23} \cos \theta - a_{13} \sin \theta, \\ a'_{33} &= a_{33}, \end{aligned}$$

одакле се додатно можемо уверити да су Δ , D и T инваријанте криве другог реда у односу на ротацију.

Свођење криве другог реда на канонски облик након ротације подразумевао је трансляцију. Међутим, како се трансляција не може приказати матрицом, преостаје нам да формуле трансляције

$$x_1 = x'_1 + c_1, \quad x_2 = x'_2 + c_2,$$

заменимо у једначину криве, одакле у складу са једначином (1.31) добијамо

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}, & a'_{12} &= a_{12}, & a'_{22} &= a_{22}, \\ a'_{13} &= c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + a_{13}, \\ a'_{23} &= c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + a_{23}, \\ a'_{33} &= c_1^2 a_{11} + 2c_1 c_2 a_{12} + c_2^2 a_{22} + 2c_1 a_{13} + 2c_2 a_{23} + a_{33}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Из претходних формула видимо да се комплетна матрица квадратне форме сачувала, односно да важи $A' = A$, што одмах повлачи инваријантност трага ($T' = T$) и мале детерминанте ($D' = D$) за произвољну трансляцију. Преостаје инваријантност за Δ што ћемо испитати коришћењем особина детерминанти да се чувају приликом елементарних операција (додавање врсте умножене неким скаларом на врсту или додавање колоне умножене неким скаларом на колону). Ако у оригиналној великој детерминанти Δ на трећу колону додамо прву колону множenu са c_1 и другу колону множenu са c_2 , а затим на трећу врсту додамо прву врсту множenu са c_1 и другу врсту множenu са c_2 добијамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & c_1 a_{13} + c_2 a_{23} + a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{vmatrix} = \Delta',$$

јер важи

$$\begin{aligned} a'_{33} &= c_1^2 a_{11} + 2c_1 c_2 a_{12} + c_2^2 a_{22} + 2c_1 a_{13} + 2c_2 a_{23} + a_{33} \\ &= c_1(c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + a_{13}) + c_2(c_1 a_{12} + c_2 a_{22} + a_{23}) + c_1 a_{13} + c_2 a_{23} + a_{33}. \end{aligned}$$

На овај начин показали смо да су величине Δ , D и T заиста инваријанте како у односу на ротацију, тако и у односу на трансляцију. Наравно, онда је то и карактеристични полином матрице квадратне форме, $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - T\lambda + D$.

Инваријанте које смо успоставили могу бити од велике користи приликом свођења криве на канонски облик. Међутим, оне нам омогућавају и да уз мало рачуна одредимо геометријски тип криве другог реда. Размотримо како делује процес класификације кривих другог реда у односу на инваријанте.

Класификација започиње ротацијом која исправља криву, односно елиминише члан a_{12} . Након ротације, уколико је $a_{11}a_{22} \neq 0$ врши се трансляција која криву доводи на облик (1.34), $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33} = 0$. Инваријанте Δ , D и T се не мењају ротацијом и трансляцијом, тако да њихове вредности израчунате за почетну криву морају бити једнаке новим вредностима, $\Delta = a_{11}a_{22}a_{33}$, $D = a_{11}a_{22}$, $T = a_{11} + a_{22}$. Карактеристични полином је такође инваријанта, а од раније знамо да њене нуле λ_1 и λ_2 , као сопствене вредности матрице квадратне форме криве, одговарају вредностима a_{11} и a_{22} . Како овде разматрамо случај $D \neq 0$, то је $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$, док слободан члан можемо изразити са $a_{33} = \Delta/D$, што нас доводи до једначине,

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \frac{\Delta}{D} = 0.$$

У првој варијанти је $D = \lambda_1 \lambda_2 > 0$, одакле добијамо $\operatorname{sgn} \lambda_1 = \operatorname{sgn} \lambda_2 = \operatorname{sgn} T$ и $\operatorname{sgn}(\Delta/D) = \operatorname{sgn} \Delta$. Тада случај $\Delta T < 0$ даје елипсу, случај $\Delta T > 0$ даје празан скуп (имагинарна елипса), док случај $\Delta = 0$ даје тачку. У другој варијанти имамо $D = \lambda_1 \lambda_2 < 0$,

при чему је $\text{sgn}(\Delta/D) = -\text{sgn } \Delta$. Тада случај $\Delta \neq 0$ даје хиперболу, док случај $\Delta = 0$ даје две праве које се секу.

Преостаје нам да испитамо шта се дешава кад након почетне ротације имамо $a_{11}a_{22} = 0$, где неумањујући општост претпостављамо $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} = 0$. У првој варијанти имамо $a_{23} \neq 0$, где су инваријанте $T = a_{11} \neq 0$, $D = 0$ и $\Delta = -a_{11}a_{23}^2 \neq 0$, одакле је крива парабола са једначином $Tx_1^2 \pm 2\sqrt{-\Delta/T}x_2 = 0$.

У последњој варијанти имамо $a_{23} = 0$, где је једначина криве $a_{11}x_1^2 + a_{33} = 0$ за коју важи $D = 0$ и $\Delta = 0$, али се вредност a_{33} не може директно изразити преко преостале инваријанте T . Због тога је корисно увести следеће величине,

$$P_1 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad P_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad P = P_1 + P_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix},$$

где важи

$$\frac{1}{2}((\text{tr } \bar{A})^2 - \text{tr}(\bar{A}^2)) = D + P_1 + P_2,$$

односно $\chi_{\bar{A}}(\lambda) = -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (D + P)\lambda + \Delta$, одакле се види да је P полуинваријанта у смислу да је инваријанта само за ротацију, али не и за транслацију.

Полуинваријанта P омогућава да у случају $D = \Delta = 0$ расплетемо која могућност је у питању: пар паралелних правих, једна права или празан скуп. Приметимо да опција $a_{22} = 0$ због $0 = D = -a_{12}^2$ даје $a_{12} = 0$, док $0 = \Delta = -a_{11}a_{23}^2$ даје $a_{23} = 0$, што је могуће само за $P_1 = 0$. Сасвим слично, опција $a_{11} = 0$ је могућа само за $P_2 = 0$.

Геометријска интуиција нам говори да криву пресечемо произвољном правом и гледамо број пресечних тачака. Уколико је тај број два, онда имамо две паралелне праве, а уколико је тај број један, онда је у питању права. Случај без пресечних тачака је компликованији, јер осим празног скупа, могуће је да смо погодили баш правац праве која припада кривој, те зато нисмо нашли пресек. За $a_{22} \neq 0$, пресек криве и праве $x_1 = 0$ даје квадратну једначину $a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$ која има дискриминанту $4a_{23}^2 - 4a_{22}a_{33} = -4P_1$, док за $a_{11} \neq 0$, пресек криве и праве $x_2 = 0$ даје једначину $a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1 + a_{33} = 0$ која има дискриминанту $4a_{13}^2 - 4a_{11}a_{33} = -4P_2$. Напоменимо да се аномалија која настаје кад погодимо правац праве која припада кривој не дешава у случају квадратне једначине.

Уколико је $P_1 < 0$ или $P_2 < 0$, једначина пресека је квадратна са позитивном дискриминантом, те криву представљају две паралелне праве. Уколико је $P_1 > 0$ или $P_2 > 0$, једначина пресека је квадратна са негативном дискриминантом, те добијамо две паралелне имагинарне праве. Приметимо да из претходних закључака $P_1P_2 < 0$ није опција, те је $P = 0$ ако и само ако је $P_1 = P_2 = 0$, а тада је барем једна једначина пресека квадратна са нула дискриминантом, те је крива заправо права. Сумирајући резултате имамо две паралелне праве за $P < 0$, једну праву за $P = 0$ и празан скуп за $P > 0$.

Овако смо комплетирали резултате класификације кривих другог реда помоћу инваријанти, а добро је имати на уму наредну табелу.

$D : \Delta$	$\Delta \neq 0$ недегенерисане криве	$\Delta = 0$ дегенерисане криве
$D > 0$	елипса за $\Delta T < 0$ празан скуп за $\Delta T > 0$	тачка
$D < 0$	хипербола	две праве које се секу
$D = 0$	парабола	две паралелне праве за $P < 0$ права за $P = 0$ празан скуп за $P > 0$

1.10 Центар, тангента, дијаметар

Центар неке криве је њен центар симетрије. Ако крива Γ има центар C то значи да за свако $X \in \Gamma$ важи $Y \in \Gamma$, где је Y централно симетрична тачка тачки X , односно $\vec{CX} = -\vec{CY}$. Природно питање које се поставља је које криве другог реда имају центар и како га одредити уколико он постоји.

Приметимо да симетрична тачка тачки $X(x_1, x_2)$ у односу на потенцијални центар $C(c_1, c_2)$ јесте $Y(2c_1 - x_1, 2c_2 - x_2)$. Уколико би центар криве био координатни почетак, тачка Y би имала много згоднији запис, $(-x_1, -x_2)$. Зато уводимо транслацију координатног система, $x_1 = x'_1 + c_1$, $x_2 = x'_2 + c_2$, где центар криве постаје тачка $(0, 0)$. Тако крива која у оригиналном координатном систему има једначину

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0,$$

у новом транслираном координатном систему добија једначину

$$g(x_1, x_2) = a'_{11}x_1^2 + 2a'_{12}x_1x_2 + a'_{22}x_2^2 + 2a'_{13}x_1 + 2a'_{23}x_2 + a'_{33} = 0,$$

при чему важе везе

$$a'_{13} = c_1a_{11} + c_2a_{12} + a_{13}, \quad a'_{23} = c_1a_{12} + c_2a_{22} + a_{23}, \quad (1.38)$$

које смо раније израчунали у (1.37).

У новом координатном систему, по дефиницији центра, $g(x_1, x_2) = 0$ повлачи $g(-x_1, -x_2) = 0$. Због тога, за сваку тачку (x_1, x_2) криве која је дата једначином $g(x_1, x_2) = 0$ и има центар $(0, 0)$, важи $0 = g(x_1, x_2) - g(-x_1, -x_2) = 4a'_{13}x_1 + 4a'_{23}x_2$, односно

$$a'_{13}x_1 + a'_{23}x_2 = 0. \quad (1.39)$$

Уколико је (1.39) једначина праве, онда наша крива мора бити подскуп те праве. Нема много кривих другог реда које су подскуп праве, то су права, тачка и празан скуп, те њих посебно испитујемо. Није тешко приметити да права има бесконачно центара (свака тачка са ње), тачка има један центар (сама та тачка), док празан скуп за центар има сваку тачку равни.

У супротном, крива другог реда није подскуп праве те једначина (1.39) није једначина праве, што је могуће само у случају да важи $a'_{13} = a'_{23} = 0$. Везе из (1.38), доносе **једначине центара** у оригиналном координатном систему,

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13} = 0,$$

$$a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23} = 0.$$

Са друге стране, лако је проверити да ако ове једначине важе, крива $g(x_1, x_2) = 0$ има центар у $(0, 0)$, односно да крива $f(x_1, x_2) = 0$ има центар у (c_1, c_2) . Једначине центра могу се лако запамтити у облику који укључује парцијалне изводе,

$$f_{x_1}(c_1, c_2) = 0, \quad f_{x_2}(c_1, c_2) = 0,$$

јер вредност функције f у центру мора достићи екстремну вредност, те су изводи дуж било ког правца једнаки нули. У сваком случају, једначине центра показују да је проналажење центра криве другог реда еквивалентно решавању линеарне матричне једначине $AX = B$, која у расписаном облику гласи,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix}.$$

Уколико је $D = \det A \neq 0$, матрица A је инвертибилна и једначина $AX = B$ има јединствено решење $X = A^{-1}B$. Криве другог реда са $D \neq 0$ које нису подскуп праве су елипса, хипербола и две праве које се секу, те оне имају тачно један центар. Конкретне координате тог јединственог центра даје једноставан рачун,

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{13} \\ -a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} \\ a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23} \end{pmatrix},$$

одакле добијамо

$$(c_1, c_2) = \left(\frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}}, \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{12}} \right) = \left(\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D} \right),$$

где је $D_1 = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}$ и $D_2 = a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}$.

Наравно, D_1 и D_2 су детерминанте које се појављују приликом решавања матричне једначине Крамеровом⁶ методом. Штавише, уколико центар постоји и има координате (c_1, c_2) , онда имамо

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 & a_{12} \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = c_1 D, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{12} & -a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}c_1 + a_{12}c_2 \\ a_{12} & a_{12}c_1 + a_{22}c_2 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = c_2 D \end{aligned}$$

те везе $D_1 = c_1 D$ и $D_2 = c_2 D$ важе у општем случају.

Посебно нас занима преостали случај $D = \det A = 0$ где је познато да једначина $AX = B$ нема јединствено решење, а тад егистенција центра доноси $D_1 = D_2 = 0$. Обратно, ако је $D_1 = D_2 = 0$, онда су $A_1 = (a_{11}, a_{12})$, $A_2 = (a_{12}, a_{22})$ и $B = (-a_{13}, -a_{23})$ међусобно колинеарни вектори, те постоји ненула вектор V и скалари $\mu, \nu, \xi \in \mathbb{R}$ тако да је $A_1 = \mu V$, $A_2 = \nu V$ и $B = \xi V$. Матрична једначина постаје $c_1 \mu V + c_2 \nu V = \xi V$, што је еквивалентно са $\mu c_1 + \nu c_2 = \xi$. Како разматрамо криве другог реда, то је $A \neq 0$, одакле следи да није $\mu = \nu = 0$, те је $\mu x_1 + \nu x_2 = \xi$ једначина праве и свака тачка те праве јесте центар наше криве. Тако смо показали да у случају $D = 0$ центар постоји, а самим тим бесконачно много њих, ако и само ако је $D_1 = D_2 = 0$.

Ако детерминанту Δ развијемо по трећој колони добијамо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{13} D_1 + a_{23} D_2 + a_{33} D.$$

У случају $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ имамо $\Delta = a_{13} D_1 + a_{23} D_2$, одакле следи

$$\begin{aligned} D_1^2 &= (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})^2 = a_{22}(a_{11}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{22}a_{13}^2) = -a_{22}(a_{13}D_1 + a_{23}D_2) = -a_{22}\Delta, \\ D_2^2 &= (a_{12}a_{13} - a_{23}a_{11})^2 = a_{11}(a_{22}a_{13}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{23} + a_{11}a_{23}^2) = -a_{11}(a_{13}D_1 + a_{23}D_2) = -a_{11}\Delta, \end{aligned}$$

те је $\Delta = 0$ ако и само ако је $D_1 = D_2 = 0$.

Дакле, криве другог реда за које је $D = 0$ имају центар, а самим тим имају бесконачно много центара, ако и само ако је $\Delta = 0$. Зато две паралелне праве ($D = \Delta = 0$) имају бесконачно много центара, док парабола ($D = 0, \Delta \neq 0$) нема центар.

Размотримо тангенте на криву другог реда Γ која је задата својом симетричном матрицом реда три. Ако за потребне колоне и матрицу криве уведемо следеће ознаке,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

⁶Gabriel Cramer (1704–1752), швајцарски математичар

тада можемо рећи да тачка (x_1, x_2) припада Γ уколико важи $X^T A X = 0$. Желимо да пронађемо тангенте на Γ које пролазе кроз тачку (p_1, p_2) . Ако тражена тангента има правац (v_1, v_2) , то она садржи тачке облика $(p_1 + tv_1, p_2 + tv_2)$ за $t \in \mathbb{R}$. Овим тачкама одговарају колоне $P + tV$, те тачке које припадају и кривој и тангенти задовољавају једначину $(P + tV)^T A (P + tV) = 0$. Како је $V^T A P = (V^T A P)^T = P^T A V$, то долазимо до једначине

$$(V^T A V)t^2 + 2(P^T A V)t + P^T A P = 0.$$

Ако је $V^T A V \neq 0$ у питању је квадратна једначина, а услов додира тангенте и криве даје двоструко решење, односно нула дискриминанту, одакле следи

$$(P^T A V)^2 = (V^T A V)(P^T A P).$$

Уколико додатно претпоставимо да тачка (p_1, p_2) припада Γ , тада је $P^T A P = 0$ и услов додира постаје $P^T A V = 0$, што у расписаном облику гласи

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13})v_1 + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23})v_2 = 0.$$

Због тога, ако је $f(x_1, x_2) = 0$ једначина криве другог реда Γ и (v_1, v_2) правац тангенте на Γ у тачки $(p_1, p_2) \in \Gamma$, тада важи $(f'_{x_1}(p_1, p_2))v_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))v_2 = 0$. Лако је приметити да права $(f'_{x_1}(p_1, p_2))x_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))x_2 = 0$ има баш тај правац, те нам преостаје да је паралелно померимо тако да прође кроз тачку (p_1, p_2) , што нас доводи до једначине тангенте,

$$(f'_{x_1}(p_1, p_2))(x_1 - p_1) + (f'_{x_2}(p_1, p_2))(x_2 - p_2) = 0. \quad (1.40)$$

У општем случају тангента на криву (не нужно другог реда) може се тражити методама математичке анализе. Коефицијент правца тангенте на криву која је дата са $x_2 = f(x_1)$ у тачки (p_1, p_2) криве $(p_2 = f(p_1))$ једнак је првом изводу функције криве у p_1 , односно $f'(p_1)$. Ако x_2 схватимо као функцију по x_1 и једначину $f(x_1, x_2) = 0$ диференцирамо по x_1 добијамо $2a_{11}x_1 + 2a_{12}(x_2 + x_1x'_2) + 2a_{22}x_2x'_2 + 2a_{13} + 2a_{23}x'_2 = 0$, односно

$$(2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}) + (2a_{12}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23})x'_2 = 0,$$

што се лакше може записати са $f'_{x_1}(x_1, x_2) + (f'_{x_2}(x_1, x_2))x'_2 = 0$. Вредност извода x'_2 у тачки p_1 једнака је коефицијенту правца тангенте на криву у тачки (p_1, p_2) са криве, те је зато права дата једначином $(f'_{x_1}(p_1, p_2))x_1 + (f'_{x_2}(p_1, p_2))x_2 = 0$ баш тог правца, што потврђује наш резултат из једначине (1.40).

У случају да је $V^T A V = a_{11}v_1^2 + 2a_{12}v_1v_2 + a_{22}v_2^2 = 0$ нема квадратне једначине, те за $P^T A V \neq 0$ можемо рећи да је друга пресечна тачка праве и криве (прва наступа за $t = 0$) у бесконачности (напишемо $t = 1/s$ и пустимо да s тежи ка нули). Тада за правац (v_1, v_2) важи

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-D}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{-a_{12} \mp \sqrt{-D}}.$$

То се никада не дешава у случају елипсе ($D > 0$). У случају параболе ($D = 0$), решење се своди на један правац који је заправо правац осе параболе, што значи да праве паралелне оси имају само једну заједничку тачку са том параболом, а у питању нису тангенте. У случају хиперболе ($D < 0$) постоје два таква правца, а то су правци паралелни асимптотима хиперболе.

Конкретно, уколико посматрамо канонске једначине елипсе, хиперболе и параболе,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad x_2^2 = 2lx_1,$$

тангенте у тачки (p_1, p_2) са те криве гласе,

$$\frac{p_1 x_1}{a^2} + \frac{p_2 x_2}{b^2} = 1, \quad \frac{p_1 x_1}{a^2} - \frac{p_2 x_2}{b^2} = 1, \quad p_2 x_2 = l(x_1 + p_1).$$

Асимптоте хиперболе су праве које додирују криву у бесконачности, односно оне се у бесконачности понашају као крива. Ако пођемо од канонске једначине хиперболе њене асимптоте можемо видети кроз једначину

$$0 = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = \left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} \right) \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} \right).$$

Самим тим асимптоте на хиперболу су праве облика

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} x_1.$$

Под **дијаметром** елипсе или хиперболе подразумевамо сваку праву која пролази кроз центар те криве. Ако искористимо једначине центра $f'_{x_1}(c_1, c_2) = 0$ и $f'_{x_2}(c_1, c_2) = 0$, можемо посматрати једначину

$$u_1 f'_{x_1}(x_1, x_2) + u_2 f'_{x_2}(x_1, x_2) = 0, \quad (1.41)$$

за произвољне реалне u_1 и u_2 који нису истовремено једнаки нули, $u_1^2 + u_2^2 > 0$. Како су парцијални изводи $f'_{x_1}(x_1, x_2)$ и $f'_{x_2}(x_1, x_2)$ линеарни по x_1 и x_2 то је једначина (1.41) највише линеарна. Прецизније, у расписаном облику једначина (1.41) гласи,

$$(u_1 a_{11} + u_2 a_{12})x_1 + (u_1 a_{12} + u_2 a_{22})x_2 + (u_1 a_{13} + u_2 a_{23}) = 0,$$

те она није линеарна ако и само ако важи

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Међутим, како посматрамо само елипсе и хиперболе, то имамо $\det A = D \neq 0$, те матрична једначина $AX = 0$ има јединствено решење $X = 0$, односно $u_1 = u_2 = 0$. Дакле, једначина (1.41) јесте линеарна и зато је у питању једначина неке праве. Са друге стране, центар криве (c_1, c_2) очигледно испуњава ту једначину, те је у питању права која пролази кроз центар. Закључујемо да једначина (1.41) описује дијаметре наше криве, а добијамо их тако што за u_1 и u_2 шетамо реалне бројеве који нису истовремено нула.

Посебну улогу за елипсу и хиперболу имају **конјуговани дијаметри**. Ако изаберемо неки дијаметар, њему конјугован биће онај који се добија тако што покупи-мо средишта свих тетива паралелних почетном дијаметру. Конјугован дијаметар елипсе може се видети и као онај који има правац тангенте у тачкама у којима почетни дијаметар сече криву. Основна идеја је да је елипса уписана у паралелограм који чине два правца међусобно конјугованих дијаметара.

Теорема 1.17. *Дијаметар конјугован дијаметру са правцем (u_1, u_2) је дат једначином (1.41).*

Доказ. Нека је $P(p_1, p_2)$ тачка са криве и уједно тачка са праве која има правац (u_1, u_2) , а пролази кроз центар $C(c_1, c_2)$. Конјугован дијаметар за дијаметар CP има правац тангенте на криву у тачки P . Тангенту смо израчунали у (1.40), те ако је паралелно померимо да прође кроз C имамо $(f'_{x_1}(p_1, p_2))(x_1 - c_1) + (f'_{x_2}(p_1, p_2))(x_2 - c_2) = 0$, што је једначина конјугованог дијаметра. У расписаном облику једначина гласи

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13})(x_1 - c_1) + (a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23})(x_2 - c_2) = 0,$$

што након груписања по p_1 и p_2 даје

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - a_{11}c_1 - a_{12}c_2)p_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 - a_{12}c_1 - a_{22}c_2)p_2 + (a_{13}x_1 - a_{13}c_1 + a_{23}x_2 - a_{23}c_2) = 0.$$

Из једначина центра, $a_{13} = -a_{11}c_1 - a_{12}c_2$ и $a_{23} = -a_{12}c_1 - a_{22}c_2$, након одговарајућих замена добијамо једначину конјугованог дијаметра

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})p_1 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23})p_2 - (a_{11}c_1 + a_{12}c_2)x_1 - a_{13}c_1 - (a_{12}c_1 - a_{22}c_2)x_2 - a_{23}c_2 = 0,$$

што после сређивања постаје

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13})(p_1 - c_1) + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23})(p_2 - c_2) = 0.$$

Почетни дијаметар CP има правац $(p_1 - c_1, p_2 - c_2) = (u_1, u_2)$, те претходна једначина гласи $u_1 f'_{x_1}(x_1, x_2) + u_2 f'_{x_2}(x_1, x_2) = 0$, што доказује тврђење. $\square$

Нека су сада k_1 и k_2 коефицијенти правца међусобно конјугованих дијаметара. Дијаметар конјугован оном који има коефицијент правца k_1 је по претходној теорему $1 \cdot f'_{x_1} + k_1 \cdot f'_{x_2} = 0$, односно $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13} + k_1 a_{12}x_1 + k_1 a_{22}x_2 + k_1 a_{23} = 0$. Коефицијент правца ове праве је

$$k_2 = -\frac{a_{11} + k_1 a_{12}}{a_{12} + k_1 a_{22}},$$

те имамо $k_2(a_{12} + k_1 a_{22}) + a_{11} + k_1 a_{12} = 0$, односно

$$a_{11} + a_{12}(k_1 + k_2) + a_{22}k_1 k_2 = 0,$$

што је формула за конјуговане правце.

1.11 Површи другог реда

За сада смо испитали криве другог реда које живе у дводимензионом простору, а сада повећавамо димензију за један. **Површи другог реда** је скуп свих тачака (x_1, x_2, x_3) тродимензионог простора које задовољавају једначину $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, где је f полином другог степена по променљивим x_1, x_2 и x_3 , односно важи

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44},$$

где постоји барем један квадратни члан, $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 > 0$. Једначина површи другог реда може се записати помоћу матрица

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{pmatrix},$$

где у матричном запису имамо

$$f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X + 2B^T X + a_{44} = 0.$$

По узору на теорију кривих другог реда, желимо да ротацијом исправимо површ, при чему то радимо просторном ротацијом. Алгебарски, то значи дијагонализацију симетричне матрице A , те нам је потребна спектрална теорема (Теорема А.4).

Нека је P матрица преласка са старе базе e на нову базу e' из спектралне теореме, која се састоји од јединичних сопствених вектора матрице A . Промена базе даје $e' = e \cdot P$, док се координате мењају са $X = PX'$. Израз $X^TAX + 2B^TX + a_{44}$ после ове трансформације постаје $(PX')^T A(PX') + 2B^T PX' + a_{44}$, односно $X'^T (P^T A P) X' + 2(B^T P) X' + a_{44}$. Нове улоге преузимају матрице $A' = P^T A P$ и $B'^T = B^T P$, при чему је

$$\begin{aligned} A' &= P^T A P = P^T A (E_1 | E_2 | E_3) = P^T (A E_1 | A E_2 | A E_3) \\ &= (E_1 | E_2 | E_3)^T (\lambda_1 E_1 | \lambda_2 E_2 | \lambda_3 E_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

дијагонална матрица, где на дијагонали имамо управо сопствене вредности матрице A . На овај начин ротирали смо координатни систем што нам је омогућило да исправимо површ, те је добијена једначина облика

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3 + a_{44} = 0.$$

Аналогно свођењу криве другог реда на канонски облик, на располагању имамо и translацију која за $i = 1, 2, 3$, уколико је $\lambda_i \neq 0$, уклања коефицијент μ_i . Наиме, због

$$\lambda_i x_i^2 + 2\mu_i x_i = \lambda_i \left(x_i + \frac{\mu_i}{\lambda_i} \right)^2 - \frac{\mu_i^2}{\lambda_i},$$

уводимо translацију $x'_i = x_i + \mu_i/\lambda_i$ која елиминише μ_i из будућих једначина.

Класификацију површи другог реда радимо дискусијом по рангу матрице A . Претпоставимо најпре да је $\text{rang}(A) = 3$, што значи да су све сопствене вредности различите од нуле, односно $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$. Након одговарајуће translације добијамо једначину облика

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + p = 0.$$

У првој варијанти, квадратни коефицијенти (односно сопствене вредности почетне матрице) су истог знака, $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } \lambda_2 = \text{sgn } \lambda_3$, те дискутујемо знак од p . Ако се он разликује, $p\lambda_1 < 0$, уводимо смене $a = \sqrt{-p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{-p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{-p/\lambda_3}$, те добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1,$$

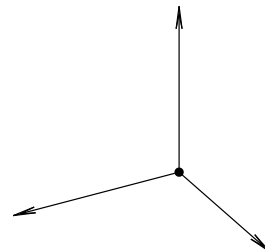
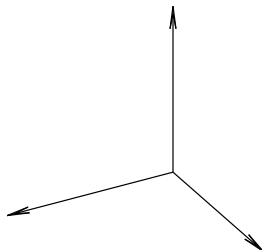
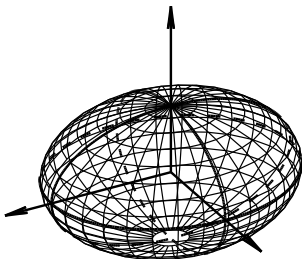
која представља **елипсоид**. Ако су сви коефицијенти истог знака, $p\lambda_1 > 0$, тада за $a = \sqrt{p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{p/\lambda_3}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = -1,$$

што је **имагинарни елипсоид** (празан скуп). Преостаје случај $p = 0$ који после уведених смена $a = \sqrt{\lambda_2 \lambda_3}$, $b = \sqrt{\lambda_1 \lambda_3}$ и $c = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}$ даје једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 0,$$

коју задовољава само координатни почетак, те је у питању **тачка**.



У другој варијанти, квадратни коефицијенти нису сви истог знака, а без смањења општости можемо поставити $\text{sgn } \lambda_1 = \text{sgn } \lambda_2 = -\text{sgn } \lambda_3$ јер иначе изометријом размењујемо одговарајуће координатне осе. Ако је $p\lambda_1 < 0$, за $a = \sqrt{-p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{-p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{p/\lambda_3}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1,$$

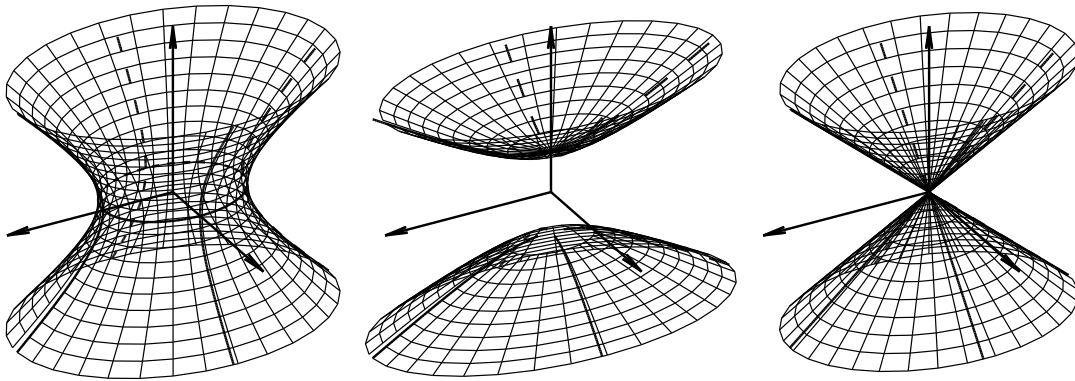
што је **једноделни хиперболоид**. Уколико је $p\lambda_1 > 0$, за $a = \sqrt{p/\lambda_1}$, $b = \sqrt{p/\lambda_2}$ и $c = \sqrt{-p/\lambda_3}$ имамо

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = -1,$$

што је **двodelни хиперболоид**. Преостаје $p = 0$, где смене $a = \sqrt{-\lambda_2\lambda_3}$, $b = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3}$ и $c = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ доводе до једначине

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0,$$

која представља **елиптички конус**.



Прелазимо на наредни велики случај, $\text{rang}(A) = 2$. Не умањујући општост претпоставимо да је $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$. Претходно наведене трансформације елиминисаће μ_1 и μ_2 .

У првој варијанти је $\mu_3 \neq 0$, где додатна трансформација $x'_3 = x_3 + a_{44}/2\mu_3$ уклања слободан члан и доводи нас до једначине

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + 2\mu_3 x_3 = 0,$$

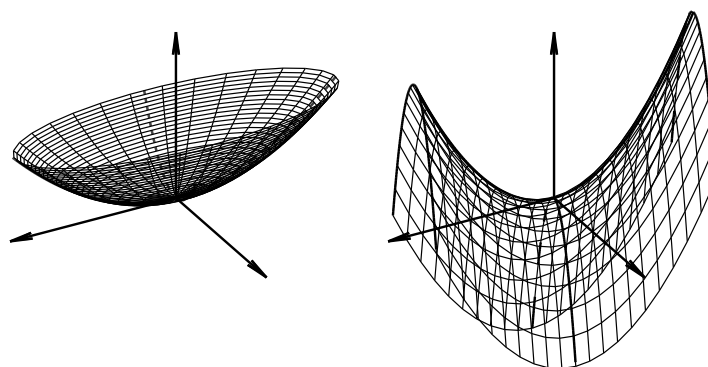
при чему додатно можемо обезбедити услов $\mu_3\lambda_1 < 0$, јер у супротном примењујемо изометрију $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = -x_3$ која окреће смер x_3 -осе. Уколико је $\lambda_1\lambda_2 > 0$, смене $a = \sqrt{-\mu_3/\lambda_1}$ и $b = \sqrt{-\mu_3/\lambda_2}$ доводе нас до једначине

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3,$$

што је **елиптички параболоид**. Други случај представља $\lambda_1\lambda_2 < 0$, где након смена $a = \sqrt{-\mu_3/\lambda_1}$ и $b = \sqrt{\mu_3/\lambda_2}$ добијамо једначину

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3,$$

што је **хиперболички параболоид** или **седло**.



У другој варијанти имамо $\mu_3 = 0$, односно једначину

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + p = 0,$$

уз $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Важно је приметити да ова једначина не садржи x_3 , те смо је стога већ анализирали у класификацији кривих другог реда. Све што је било решење наше једначине у две димензије, сада се шири на трећу димензију за произвољну трећу координату, односно обухвата праве које су нормалне на Ox_1x_2 раван. Дакле, решење је цилиндрична површ (детаље можете видети у Секцији 1.12) чија је директриса већ виђена крива другог реда. Једначина

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

представља елипсу у равни, а цилиндар над елипсом је **елиптички цилиндар**. Једначина

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1,$$

представља имагинарну елипсу у равни, а цилиндар над тим је **имаинарни елиптички цилиндар** (празан скуп). Једначина

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0,$$

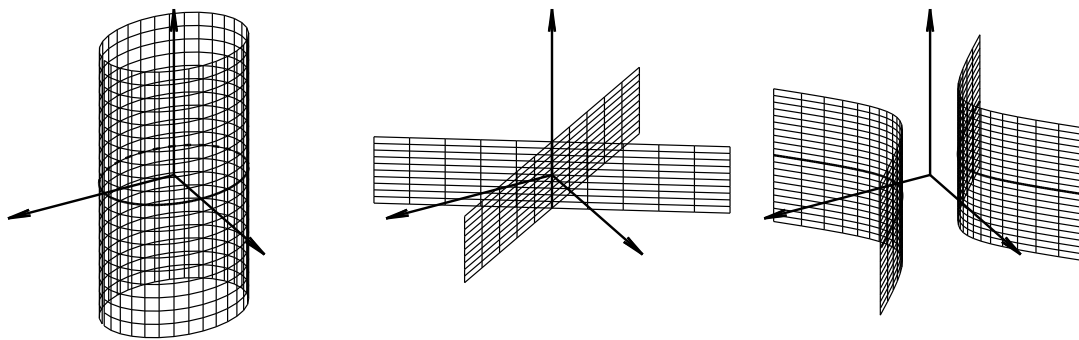
представља тачку у равни, а цилиндар над тачком је **права**. Једначина

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0,$$

представља две праве у равни које се секу, а цилиндар над тим су **две равни које се секу**. Једначина

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1,$$

представља хиперболу у равни, а цилиндар над тим је **хиперболички цилиндар**.



Преостаје да се испита последњи велики случај, $\text{rang}(A) = 1$ (случај $\text{rang}(A) = 0$ нема квадратне чланове, те једначина није другог степена). Овде имамо тачно једну сопствену вредност различиту од нуле, а не умањујући општост можемо претпоставити да је то λ_1 . Након транслације дуж x_1 -осе добијамо једначину облика

$$\lambda_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3 + p = 0.$$

Преостаје нам да искористимо трансформације у равни Ox_2x_3 , а основна идеја је да читав израз $2\mu_2 x_2 + 2\mu_3 x_3$ постане неко ново x_2 множено одговарајућим скаларом. Уколико је $\mu_2^2 + \mu_3^2 \neq 0$ у питању је ротација у равни Ox_2x_3 задата једначином

$$x'_2 = \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_2 + \frac{\mu_3}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_3,$$

односно њеним парњаком

$$x'_3 = \frac{-\mu_3}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_2 + \frac{\mu_2}{\mu_2^2 + \mu_3^2} x_3.$$

Очигледна ротација елиминише једну од променљивих, а додатна транслација дуж преостале променљиве елиминише и слободан члан одакле је $\lambda_1 x_1^2 + 2\mu_2 x_2 = 0$. Добијали смо једначину облика

$$x_1^2 = 2px_2,$$

која представља параболу у равни, а цилиндар над тим је **ипараболички цилиндар**. Последњи случај наступа кад је $\mu_2^2 + \mu_3^2 = 0$, односно кад је $x_1^2 = p$, те имамо дискусију по знаку од p . Једначина

$$x_1^2 = a^2,$$

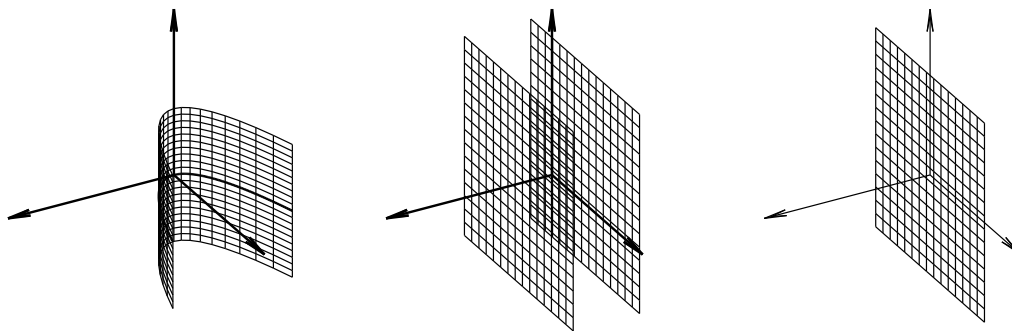
у равни представља две паралелне праве, а цилиндар над тим су **две ипаралелне равни**. Једначина

$$x_1^2 = -a^2,$$

у равни представља две имагинарне паралелне праве, а цилиндар над тим су **две имаинарне ипаралелне равни** (празан скуп). Једначина

$$x_1^2 = 0,$$

у равни представља праву, а цилиндар над правом је **раван**.

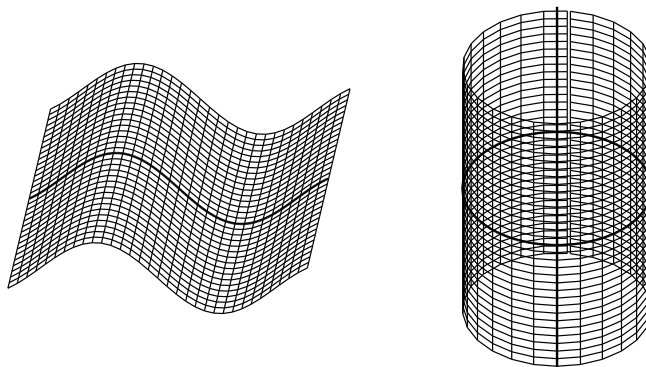


1.12 Правoliniјске површи

Постоји пуно различитих начина да се направи површ у тродимензионом простору. **Правoliniјске површи** су површи које можемо видети као унију правих, односно за њих важи да кроз сваку тачку површи пролази нека права која лежи на тој површи. Уобичајено постоји нека просторна крива коју зовемо **директриса**, по којој се крећу праве које зовемо **изводнице** или **генератрисе**, а правoliniјска површ може се описати као скуп свих тачака које припадају тим изводницама.

Уколико изводница, крећући се по директриси све време остаје паралелна самој себи, онда она описује **цилиндричну површ** или **цилиндар**. Дакле, цилиндар образује кретање неке праве која задржава фиксиран правац и при том сече директрису. Цилиндар је зато унија паралелних правих, а најчешће се за директрису узима крива која лежи у равни која није паралелна изводницама.

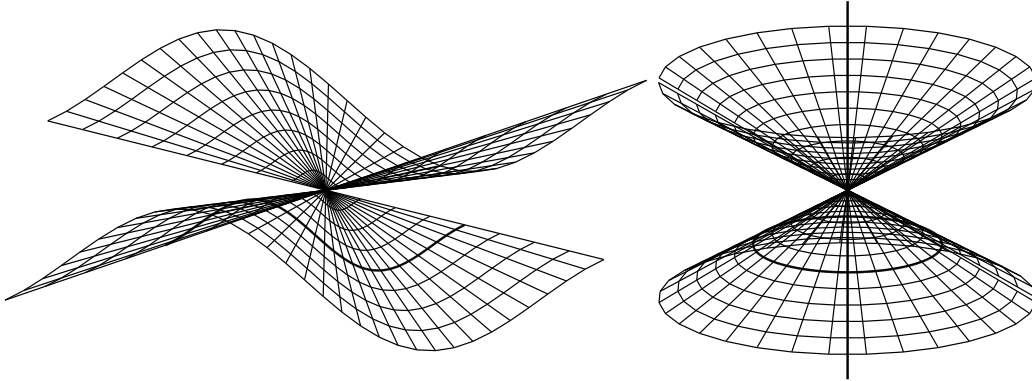
Приметимо да свака крива у равни дата једначином $f(x_1, x_2) = 0$ има одговарајућу цилиндричну површ која је дата том истом једначином у простору. Такав цилиндар за директрису има ту почетну криву, док су изводнице паралелне x_3 -оси. Уколико за директрису поставимо елипсу, параболу или хиперболу, за цилиндричне површи редом добијамо елиптички цилиндар, параболски цилиндар или хиперболички цилиндар, што смо видели у класификацији површи другог реда.



Посебан случај цилиндра је **прави кружни цилиндар** који добијамо ротацијом праве око њој паралелне праве. Карактеристике га то да у пресеку са равни која је нормална на изводнице добијамо круг. За разлику од општег цилиндра, прави кружни цилиндар (као ротациона површ) има осу, те се у њега може уписати сфера. У питању је скуп свих тачака које су подједнако удаљене од његове осе, те нам од помоћи може бити Теорема 1.13. На пример, прави кружни цилиндар који има осу s (која садржи тачку S и има правац $\vec{u}_s$) и садржи тачку M , може се описати као скуп свих тачака X за које важи

$$\|\vec{SX} \times \vec{u}_s\| = \|\vec{SM} \times \vec{u}_s\|.$$

Уколико изводница, крећући се по директриси све време пролази кроз неку унапред фиксирану тачку, онда она описује **конусну површ** или **конус**. Та заједничка тачка свих изводница зове се **врх** или **шеме** конуса, а можемо рећи да је цилиндар специјални случај конуса који има врх у бесконачности.



Посебан случај конуса је прави кружни конус који добијамо ротацијом једне праве око друге, при чему се те праве секу под оштрим углом, а с њим смо се већ упознали у Секцији 1.7. За разлику од општег конуса, прави кружни конус има осу, а у пресеку са равни која је нормална на осу добијамо круг, те се у њега може уписати сфера.

Прави кружни конус је унија правих које у врху секу осу под константним углом. Међутим, да бисмо извели једначине, најзгодније је посматрати неку тачку S са осе, која је различита од врха V , те прави кружни конус описати као унију правих које пролазе кроз V , а које су на константном растојању од тачке S . Ако тај конус садржи тачку M , тада се скуп свих њених тачака X , захваљујући Теорему 1.13, односно површини троугла VSX , може изразити једначином

$$\frac{\|\vec{VS} \times \vec{VX}\|}{\|\vec{VX}\|} = \frac{\|\vec{VS} \times \vec{VM}\|}{\|\vec{VM}\|}.$$

Вратимо се на општи конус, где кад за директрису узмемо елипсу добијамо елиптички конус из класификације површи другог реда. Међутим, у класификацији нисмо видели параболички конус нити хиперболички конус, али то не значи да се неки од њих не крије тамо под другим именом. Ако за директрису узмемо неку криву другог реда, а врх не припада равни у којој се та крива налази, природно се поставља питање да ли ће одговарајући конус бити површ другог реда.

Размотримо како израчунати једначину конуса. Многе рачунске главобоље можемо избећи тако што врх транслирамо у координатни почетак, $V(0, 0, 0)$. Такође, раван τ у којој се налази директриса можемо заротирати тако да буде нормална на x_3 -осу, те имамо једначине директрисе $f(x_1, x_2) = 0$, $x_3 = c$, где је $c = d(V, \tau) > 0$. За произвољну тачку $X(x_1, x_2, x_3)$ конуса постоји изводница кроз њу, која пролази кроз врх V и сече директрису у некој тачки $U(u_1, u_2, c)$, где је $f(u_1, u_2) = 0$. Колинеарност тачака V, X, U повлачи сразмерност вектора $\vec{VX}$ и $\vec{VU}$, одакле постоји скалар $\lambda \in \mathbb{R}$ таква да имамо $(x_1, x_2, x_3) = \lambda(u_1, u_2, c)$. Одавде је $\lambda = x_3/c$, те за $x_3 \neq 0$ важи $u_1 = cx_1/x_3$ и $u_2 = cx_2/x_3$, што даје једначину конуса $f(cx_1/x_3, cx_2/x_3) = 0$. Ако је директриса крива другог реда, f је полином другог степена, и конус је одређен једначином

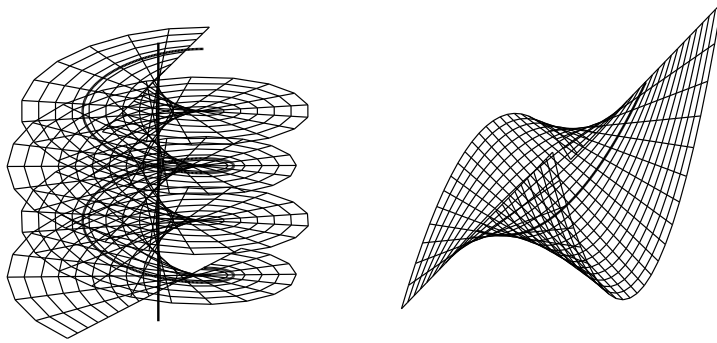
$$\frac{a_{11}c^2x_1^2 + 2a_{12}c^2x_1x_2 + a_{22}c^2x_2^2 + 2a_{13}cx_1x_3 + 2a_{23}cx_2x_3 + a_{33}x_3^2}{x_3^2} = 0.$$

Након множења са x_3^2 заиста добијамо полином другог степена, односно једначину површи другог реда. Међутим, могуће је да услов $x_3 = 0$ искључи неке од правих, тако да је овакав конус само подскуп неке површи другог реда.

На пример, ако је директриса парабола или хипербола, одговарајућа једначина конуса након множења са x_3^2 биће једначина елиптичког конуса. Да би било јасније погледајмо геометријску интерпретацију овог феномена. Ако елиптички конус засечемо са равни тако да у пресеку добијемо параболу или хиперболу, а онда тај пресек узмемо за директрису конуса, при чему врх задржимо, добијамо нови конус који је очигледно подскуп почетног елиптичког конуса. Разлика је у томе што праве које се налазе у равни која садржи врх и паралелна је пресечној равни, никако не могу пресећи директрису, тако да оне нису укључене у нови конус. У случају параболе у питању је једна права, док у случају хиперболе постоје две такве праве. Дакле, параболички конус је елиптички конус без једне праве, док хиперболичком конусу фале две праве да би постао елиптички конус.

Још један од начина да се направи правoliniјска површ је да осим директрисе фиксирамо праву коју зовемо **оса** и раван коју зовемо **директорна раван**. Све тачке са правих које секу и осу и директрису, али тако да су паралелне директорној равни формирају површ коју зовемо **коноидна површ** или **коноид**. За коноид кажемо да је **прави коноид** уколико му је оса нормална на директорну раван.

На пример, ако за директрису узмемо хеликс, као завојницу која је параметарски описана тачкама $(a \cos t, a \sin t, vt)$ за $t \in \mathbb{R}$, где су v и a фиксирани ненула скалари, а за осу x_3 -осу, онда је одговарајући прави коноид површ коју зовемо **хеликоид**. Параметарске једначине тог хеликода су $x_1 = r \cos t$, $x_2 = r \sin t$, $x_3 = vt$ за $t, r \in \mathbb{R}$.



Други пример добијамо ако поставимо параболу $x_3 = -x_2^2$, $x_1 = 1$ за директрису, док за осу узмемо x_2 -осу. Параметарска репрезентација даје

$$X(u, v) = (1, u, -u^2) + v(-1, 0, u^2) = (1 - v, u, -(1 - v)u^2)$$

за $u, v \in \mathbb{R}$, што се може описати једначином $x_3 = -x_1x_2^2$ и представља **параболички коноид**.

Хеликоид и параболички коноид очигледно нису површи другог реда, али као коноиди свакако јесу правoliniјске. Природно се поставља питање које од површи другог реда јесу правoliniјске. Елиптички конус, као и сви могући цилиндри свакако јесу правoliniјске површи. Са друге стране, за елипсоид, елиптички параболоид и дводелни хиперболоид постоји раван која их не сече, тако да оне очигледно нису правoliniјске површи.

Преостају једноделни хиперболоид и хиперболички параболоид као најзанимљивији случајеви. Испоставља се да они не само да јесу правoliniјске већ су двоструко правoliniјске, односно кроз сваку тачку површи постоје две праве које леже на површи.

Погледамо како то рачунски изгледа. Пођимо од канонске једначине једноделног хиперболоида, која се лако може трансформисати у облик

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = \left(1 - \frac{x_2}{b}\right) \left(1 + \frac{x_2}{b}\right).$$

Одавде за свако $t \in \mathbb{R}$ имамо две линеарне једначине,

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} = t \left(1 - \frac{x_2}{b}\right), \quad t \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = 1 + \frac{x_2}{b},$$

које испуњавају претходну канонску једначину. Геометријски то значи да пресечна права равни које одређују наше линеарне једначине лежи на једноделном хиперболоиду. За произвољну тачку $U(u_1, u_2, u_3)$, постоји јединствено t за које права из наше фамилије садржи U , а одређено је са

$$t = \left(\frac{u_1}{a} - \frac{u_3}{c}\right) : \left(1 - \frac{u_2}{b}\right) \quad \text{или} \quad t = \left(1 + \frac{u_2}{b}\right) : \left(\frac{u_1}{a} + \frac{u_3}{c}\right),$$

осим у случају $1 - u_2/b = 0 = u_1/a + u_3/c$ кад U припада правој са хиперболоида $1 - x_2/b = 0 = x_1/a + x_3/c$. Дакле, за сваку тачку са површи постоји одговарајућа права са површи која је наведеног типа. Сасвим слично можемо направити фамилију

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c} = t \left(1 + \frac{x_2}{b}\right), \quad t \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right) = 1 - \frac{x_2}{b},$$

где такође постоји јединствена права која садржи U или је то $1 + x_2/b = 0 = x_1/a + x_3/c$, што доказује да је једноделни хиперболоид двоструко праволинијска површ.

Случај хиперболичког параболоида се слично решава, јер се његова канонска једначина може трансформисати у

$$\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right) \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 2x_3.$$

Одавде се могу направити две фамилије правих, прва

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 2t, \quad t \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = x_3,$$

и друга

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = tx_3, \quad t \left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 2,$$

а као и раније, за произвољну тачку са површи у свакој од фамилија имамо јединствену праву која је садржи (или је то у другом случају права $x_3 = 0 = x_1/a + x_2/b$), те је и хиперболички параболоид двоструко праволинијска површ.

1.13 Сферна геометрија

Сферна геометрија је геометрија на дводимензионој површи сфере, а практичну примену има у навигацији и астрономији. Сферна геометрија илуструје математику коју би поседовала бића која живе на сфери. На пример, растојање између две тачке на сфери неће бити просто еуклидско растојање, већ дужина најкраће криве на сфери која повезује те две тачке.

Уколико посматрамо раван и сферу, постоји неколико могућности за њихов међусобни положај. У крајње неинтересантном случају раван ће промаштити сферу. У супротном, раван и сфера имају заједничких тачака, где је прва могућност да се ради о само једној заједничкој тачки и тада је у питању тангентна раван на сферу. Преостаје могућност када се раван и сфера секу по кругу. Лако је приметити да је пресечни круг највећи када раван пролази кроз центар сфере. Такав круг са сфере, чији се центар поклапа са центром сфере, зовемо **велики круи**. Географски примери су меридијани који су половине великог круга, док су све паралеле мали кругови, осим екватора који јесте велики круг.

Велики кругови добијају на значају када схватимо да се најкраће растојање између две тачке на сфери реализује баш по луку великог круга који их спаја. Криве на површи које минимизују растојања у геометрији се називају **геодезијске**, те тако можемо рећи да су праве геодезијске у равни, а велики кругови геодезијске на сфери. Основни концепти у раванској геометрији су тачке и праве. Како на сфери немамо праве као такве, велики кругови као геодезијске су адекватна замена за њих.

Посматрамо најједноставнију сферу у тродимензионом простору, сферу полупречника један, са центром у координатном почетку,

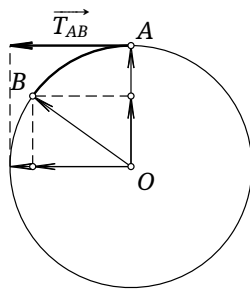
$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Сваку тачку са сфере $X \in \mathbb{S}^2$ можемо поистоветити са њеним вектором положаја у односу на центар сфере и уједно координатни почетак O , што је јединични вектор $\vec{OX}$. **Сферни троугао** ABC представљају тачке $A, B, C \in \mathbb{S}^2$, при чему захтевамо да су њихови вектори положаја, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ линеарно независни.

Разлог због којег уводимо овај додатни услов линеарне независности је да избегнемо двосмислености. Наиме, уколико су вектори $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$ линеарно зависни, то су тачке O, A, B, C копланарне, одакле следи да A, B, C припадају неком великом кругу. Аналогија са раванском геометријом је та да не можемо говорити о троуглу ABC уколико су тачке колинеарне.

За тачке A, B и C кажемо да су **темена** сферног троугла ABC . Важно је приметити да међу теменима нема антиподалних (дијаметрално супротних) тачака, јер ако су A и B антиподалне, то важи $\vec{OA} = -\vec{OB}$, из чега следи линеарна зависност наших вектора положаја, што се коси са дефиницијом. То нам омогућава да једнозначно дефинишемо **странице** сферног троугла као краће лукове великих кругова који спајају темена. Дужине страница можемо обележити са $a = \widehat{BC}$, $b = \widehat{AC}$ и $c = \widehat{AB}$, а свакако важи $a, b, c \in (0, \pi)$.

Угао између страница сферног троугла природно је угао између одговарајућих тангенти у теменима. Покушајмо да одредимо тангенту у тачки A на страницу $\widehat{AB}$, односно да изразимо вектор $\vec{T}_{AB}$ који је нормалан на $\vec{OA}$ и налази се у равни великог круга OAB . Једнозначну одређеност му можемо дати условом да је јединичан и „усмерен ка B “, односно да је угао који заклапа са $\vec{OB}$ оштар.



Први корак Грам-Шмитовог процеса ортогонализације директно одређује тражени вектор

$$\vec{T}_{AB} = \frac{\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}}{\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}\|}. \quad (1.42)$$

Како су вектори положаја $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ јединични имамо

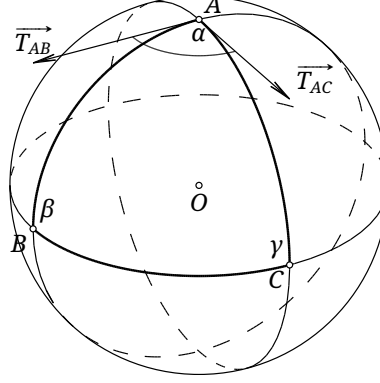
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \cos \angle AOB = \cos \widehat{AB}, \quad (1.43)$$

те проверавамо да ли $\vec{T}_{AB}$ испуњава наметнуте услове. Очигледно је $\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}$ нормалан на $\vec{OA}$ (скаларни производ нула) и припада равни OAB (као линеарна комбинација $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$). Како је $\vec{OB} \cdot (\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}) = 1 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2 = 1 - \cos^2 \widehat{AB} > 0$, то

$\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}$ са $\vec{OB}$ заклапа оштар угао, а дељењем са његовом нормом добијамо јединични вектор $\vec{T}_{AB}$ који смо тражили. На овај начин долазимо до углова сферног троугла ABC које дефинишемо са

$$\alpha = \widehat{BAC} = \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}), \quad \beta = \widehat{ABC} = \angle(\vec{T}_{BA}, \vec{T}_{BC}), \quad \gamma = \widehat{ACB} = \angle(\vec{T}_{CA}, \vec{T}_{CB}),$$

при чему такође важи $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$.



Везе између страница и углова сферног троугла можемо добити ако пажљиво размотримо тангентни вектор $\vec{T}_{AB}$ из формуле (1.42). Из формуле (1.43) смо имали $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos \widehat{AB}$, одакле добијамо

$$\begin{aligned} \|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}\|^2 &= \|\vec{OB} - \cos \widehat{AB} \cdot \vec{OA}\|^2 \\ &= \|\vec{OB}\|^2 - 2 \cos \widehat{AB} (\vec{OB} \cdot \vec{OA}) + \cos^2 \widehat{AB} \cdot \|\vec{OA}\|^2 \\ &= 1 - 2 \cos^2 \widehat{AB} + \cos^2 \widehat{AB} = 1 - \cos^2 \widehat{AB} = \sin^2 \widehat{AB}. \end{aligned}$$

Како је $\widehat{AB} \in (0, \pi)$, имамо $\sin \widehat{AB} > 0$ и отуда $\|\vec{OB} - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})\vec{OA}\| = \sin \widehat{AB}$. Одавде једначина (1.42) постаје

$$\vec{T}_{AB} = \frac{\vec{OB} - (\cos \widehat{AB})\vec{OA}}{\sin \widehat{AB}},$$

одакле добијамо

$$\vec{OB} = (\cos \widehat{AB})\vec{OA} + (\sin \widehat{AB})\vec{T}_{AB}.$$

Сасвим слично (рецимо пермутацијом темена) важи и

$$\vec{OC} = (\cos \widehat{AC})\vec{OA} + (\sin \widehat{AC})\vec{T}_{AC}.$$

Скаларним множењем ових једначина добијамо

$$\cos \widehat{BC} = \vec{OB} \cdot \vec{OC} = ((\cos \widehat{AB})\vec{OA} + (\sin \widehat{AB})\vec{T}_{AB}) \cdot ((\cos \widehat{AC})\vec{OA} + (\sin \widehat{AC})\vec{T}_{AC}),$$

те како је $\vec{OA}$ ортогонално и на $\vec{T}_{AB}$ и на $\vec{T}_{AC}$ добијамо

$$\cos \widehat{BC} = (\cos \widehat{AB})(\cos \widehat{AC})\vec{OA} \cdot \vec{OA} + (\sin \widehat{AB})(\sin \widehat{AC})\vec{T}_{AB} \cdot \vec{T}_{AC}.$$

Како је $\vec{T}_{AB} \cdot \vec{T}_{AC} = \|\vec{T}_{AB}\| \cdot \|\vec{T}_{AC}\| \cdot \cos \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}) = \cos \widehat{BAC}$ коначно добијамо **основну теорему сферне геометрије** у виду формуле

$$\cos \widehat{BC} = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{AC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \cos \angle \widehat{BAC}.$$

Основна теорема сферне геометрије је пандан косинусној теореме еуклидске геометрије, те и њу можемо звати **косинусна теорема**. Ако искористимо раније уведене ознаке за странице и углове сферног троугла, косинусну теорему можемо записати на следећи начин.

Теорема 1.18. За сферни троугао важи $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.

Симпатично је уочити пандан Питагорине теореме који наступа у случају да је угао α прав и тада је $\cos a = \cos b \cos c$.

Да бисмо пронашли пандан који одговара синусној теореме, из косинусне теореме можемо изразити угао,

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

а затим израчунати

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}, \end{aligned}$$

одакле је

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin a \sin b \sin c}{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}}.$$

Како је десна страна израза симетрична по a , b и c , то добијамо **синусну теорему** за сферни троугао.

Теорема 1.19. За сферни троугао важи $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$.

Алтернативни доказ синусне теореме можемо добити тако што на геометријски начин изразимо угао $\alpha = \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})$. Посматрајмо угао $\angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC})$. Вектори $\vec{T}_{AB}$, $\vec{T}_{AC}$, $\vec{OA} \times \vec{OB}$ и $\vec{OA} \times \vec{OC}$ су очигледно нормални на $\vec{OA}$ и зато припадају једној равни, на пример тангентној равни у тачки A на сферу. Са друге стране $\vec{T}_{AB}$ припада равни OAB и самим тим нормалан је на $\vec{OA} \times \vec{OB}$, а сасвим слично $\vec{T}_{AC}$ припада равни OAC и нормалан је на $\vec{OA} \times \vec{OC}$. Закључујемо да су $\angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC})$ и $\angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC})$ углови са нормалним крацима у једној равни, те су они једнаки или суплементни, и зато имају једнаке синусе

$$\sin \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}) = \sin \angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC}).$$

Посматрајмо сада вектор $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})$. Ако двоструки векторски производ рачунамо по формули (1.23) Теореме 1.11 добијамо

$$\begin{aligned} (\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC}) &= (\vec{OA} \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC}))\vec{OB} - (\vec{OB} \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC}))\vec{OA} \\ &= -[\vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OB}]\vec{OA} = [\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]\vec{OA}. \end{aligned}$$

Овако можемо израчунати његову норму, $\|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})\| = \|[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]\| = \nu$, где је ν запремина паралелепипеда који је генерисан векторима $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ и $\vec{OC}$. Са друге стране, норму векторског производа можемо рачунати са

$$\|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})\| = \|\vec{OA} \times \vec{OB}\| \cdot \|(\vec{OA} \times \vec{OC})\| \cdot \sin \angle(\vec{OA} \times \vec{OB}, \vec{OA} \times \vec{OC}).$$

Како је $\|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \sin \widehat{AB} = \sin \widehat{AB}$ и $\|\vec{OA} \times \vec{OC}\| = \sin \widehat{AC}$, то обједињавањем са претходним добијамо

$$\nu = \|(\vec{OA} \times \vec{OB}) \times (\vec{OA} \times \vec{OC})\| = \sin \widehat{AB} \sin \widehat{AC} \sin \angle(\vec{T}_{AB}, \vec{T}_{AC}).$$

Ако пређемо на скраћене ознаке за странице и углове сферног троугла имамо

$$\nu = \sin c \sin b \sin \alpha,$$

а како се $\mathcal{V}$ не мења пермутовањем темена, то одмах можемо дописати још две једначине

$$\mathcal{V} = \sin a \sin c \sin \beta,$$

$$\mathcal{V} = \sin b \sin a \sin \gamma,$$

те изједначавањем добити већ изведену синусну теорему за сферни троугао.

Размотримо поново основну теорему сферне геометрије, односно косинусну теорему (Теорема 1.18),

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Није тешко приметити да се у њој крију адиционе тригонометријске формуле, како за косинус збира, тако и за косинус разлике, што нас мотивише да запишемо

$$\cos a = \cos(b + c) + \sin b \sin c(\cos \alpha + 1),$$

$$\cos a = \cos(b - c) + \sin b \sin c(\cos \alpha - 1).$$

Како је $\sin b > 0$, $\sin c > 0$, $(\cos \alpha + 1) > 0$ и $(\cos \alpha - 1) < 0$, то из претходних једначина важе неједнакости

$$\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c).$$

Функција $\cos$ је опадајућа на интервалу $(0, \pi)$, тако да у случају $b + c \leq \pi$ добијамо $b + c > a$. Наравно, неједнакост $b + c > a$ важи и у преосталом случају $b + c > \pi$ јер је свакако $a < \pi$. Са друге стране је $|b - c| \in (0, \pi)$, те како је функција $\cos$ ту опадајућа, следи $|b - c| < a$. Добијене неједнакости можемо објединити са

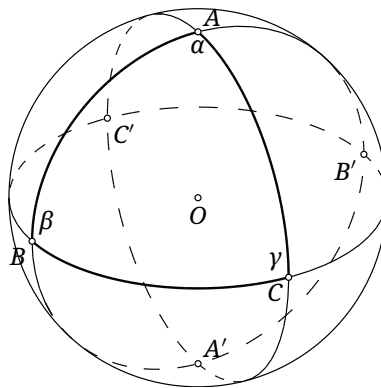
$$|b - c| < a < b + c,$$

што представља **неједнакост њироула** у изворном облику.

Сасвим слично, из $\cos(b + c) < \cos a = \cos(2\pi - a)$ можемо закључити да важи $b + c < 2\pi - a$ јер косинус расте на $(\pi, 2\pi)$, док за $b + c < \pi$ неједнакост сама по себи важи. На овај начин добили смо неједнакост за збир страница у сферном троуглу,

$$a + b + c < 2\pi.$$

На сфери можемо рачунати површине неких једноставних фигура. **Сферни двоугао** је фигура на сфери која је ограничена са два велика полукруга који су под углом θ . Читава сфера је двоугао за угао $\theta = 2\pi$, а знамо да њена површина износи $\mathcal{P}(2\pi) = 4\pi$. Како је површина сферног двоугла $\mathcal{P}(\theta)$ директно сразмерна углу θ , лако можемо закључити да је коефицијент сразмерности једнак 2, односно $\mathcal{P}(\theta) = 2\theta$.



Посматрајмо сферни троугао ABC и три велика круга који одређују његове стране. Ако у игру укључимо одговарајуће антиподалне тачке A', B', C' видимо да велики кругови деле читаву сферу на 8 области, односно 8 сферних троуглова: $\triangle ABC$,

$\triangle A'BC$, $\triangle AB'C$, $\triangle ABC'$, $\triangle A'B'C$, $\triangle A'BC'$, $\triangle AB'C'$, $\triangle A'B'C'$. Ако искористимо везе са двоугловима,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle A'BC) &= \mathcal{P}(\alpha) = \mathcal{P}(\triangle AB'C') + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'), \\ \mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle AB'C) &= \mathcal{P}(\beta) = \mathcal{P}(\triangle A'BC') + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'), \\ \mathcal{P}(\triangle ABC) + \mathcal{P}(\triangle ABC') &= \mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}(\triangle A'B'C) + \mathcal{P}(\triangle A'B'C'),\end{aligned}$$

након сумирања добијамо

$$2\mathcal{P}(\alpha) + 2\mathcal{P}(\beta) + 2\mathcal{P}(\gamma) = \mathcal{P}(2\pi) + 2\mathcal{P}(\triangle ABC) + 2\mathcal{P}(\triangle A'B'C').$$

Применом формуле $\mathcal{P}(\theta) = 2\theta$ и захваљујући томе што су антиподални троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ подударни, те истих површина, имамо $4\alpha + 4\beta + 4\gamma = 4\pi + 4\mathcal{P}(\triangle ABC)$, односно

$$\mathcal{P}(\triangle ABC) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Напоменимо да је ову формулу још 1603. године открио Томас Хериот⁷. Како је површина троугла увек позитивна, директна последице је да збир углова у сферном троуглу увек мора бити већи од π ,

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Ако пођемо од произвољног сферног троугла ABC , можемо конструисати нови сферни троугао који је блиско повезан са њим на следећи начин. Знамо да велики круг који спаја темена B и C дели сферу на две хемисфере, од којих једна садржи теме A , а пол те хемисфере означимо са A' . Дакле, уколико је велики круг кроз B и C екватор, а теме A на северној хемисфери, онда је A' северни пол, а слично можемо дефинисати тачке B' и C' . За нови троугао $A'B'C'$ кажемо да је **поларан** троуглу ABC , а наведене релације можемо записати на следећи начин,

$$\begin{aligned}\widehat{A'A} &< \pi/2, & \widehat{A'B} &= \pi/2, & \widehat{A'C} &= \pi/2, \\ \widehat{B'A} &= \pi/2, & \widehat{B'B} &< \pi/2, & \widehat{B'C} &= \pi/2, \\ \widehat{C'A} &= \pi/2, & \widehat{C'B} &= \pi/2, & \widehat{C'C} &< \pi/2,\end{aligned}$$

које га једнозначно одређују. Из симетрије претходних једначина лако можемо закључити да важи и обрат, односно да је троугао ABC поларан троуглу $A'B'C'$.

Испоставља се да су странице поларног троугла у блиској вези са угловима оригиналног троугла. Посматрајмо пресек $\widehat{B'C'}$ са великим круговима одређеним луковима $\widehat{AB}$ и $\widehat{AC}$ и нека су то тачке D и E . Приметимо да важи $\alpha = \widehat{DE}$, као и $\widehat{DC'} = \pi/2$, $\widehat{EB'} = \pi/2$. Сада је $\alpha' = \widehat{B'C'} = \widehat{EB'} + \widehat{DC'} - \widehat{DE} = \pi - \alpha$. То можемо извести за све странице поларног троугла, као и обратно јер је поларан троугао поларном троуглу онај оригиналан, што нам даје следеће везе:

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' = \alpha' + \alpha = \beta' + \beta = \gamma' + \gamma = \pi.$$

Изведене једначине за поларни троугао омогућавају да из већ познатих једнакости и неједнакости добијамо нове. На пример, изведене неједнакости $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ и $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ су еквивалентне. Такође можемо погледати суплемент косинусне теореме која сада гласи

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c.$$

⁷Thomas Harriot (1560–1621), енглески астроном и математичар

ПРОЈЕКТИВНА РАВАН

Пројективна геометрија проистекла је из практичног проблема геометријске (линеарне) перспективе у уметности, а која подразумева цртање илузије просторне дубине, онако како то реално видимо. Геометријска перспектива заснива се на природном закону да се удаљавањем од посматрача ликови смањују сразмерно удаљености. И математичари и уметници су били заинтересовани за принципе ове технике, те су започели са изучавањем основа које стоје иза њих. Уметнике су занимале паралелне праве које конвергирају и секу се у недогледу, док су математичари желели да поставе теорију која ће обухватити те принципе.

Пројективна геометрија вуче корене из ране ренесансе у Италији, када је откривена геометријска перспектива, што је оставило далекосежне последице на развој сликарства ренесансе. За изумитеља геометријске перспективе сматра се Брунелески¹, али заслуге носи и његов савременик Алберти² који је анализирао природу сликања и истраживао елементе перспективе и композиције.

Дезарга можемо сматрати оснивачем пројективне геометрије. Он је увео појам бесконачно далеке тачке, иако се тај појам независно појавио раније код Кеплера³ у [45, стр. 93]. Дезарг је написао књигу о перспективи, као и књигу о конусним пресецима [22], а заслужан је и за славну теорему која носи његово име. Његов рад на коникама утицао је на Паскала⁴ да као шеснаестогодишњак постави веома значајну теорему. Приличан допринос пројективној геометрији 17. века дао је и Ла Ир⁵.

Дезаргова књига о конусним пресецима [22] сматра се за његову најважнију књигу, као и за прву књигу из пројективне геометрије уопште. Она није била намењена продаји, штампана је у само 50 примерака који су били подељени његовим пријатељима, али су убрзо ишчезли из употребе. Било је потребно да прође два века да једна од копија (коју је направио Ла Ир) буде поново пронађена. Додатно, Дезаргов рад је недостајала јасноћа изражавања, тако да многи нису могли у потпуности да разумеју његове идеје. Бољем разумевању свакако није допринело то што је уместо многих математичких термина користио ботаничке изразе (палма, стабло, дрво, пањ... [18]). Све то је утицало да Дезаргов рад не буде превише цењен ван круга његових пријатеља и колега. Кад ту додамо успешан развој аналитичке геометрије и заокупљеност математичара овом дисциплином, не чуди превише што је пројективна геометрија остала нетакнута више од века.

За даљи развој пројективне геометрије заслужан је Монж⁶ који је крајем 18. века издвојио нацртну геометрију као посебну математичку дисциплину и може се ре-

¹Filippo Brunelleschi (1377–1446), италијански архитекта, вајар и инжењер

²Leon Battista Alberti (1404–1472), италијански архитекта, сликар и филозоф

³Johannes Kepler (1571–1630), немачки астроном и математичар

⁴Blaise Pascal (1623–1662), француски математичар, физичар и филозоф

⁵Philippe de La Hire (1640–1718), француски математичар и астроном

⁶Gaspard Monge (1746–1818), француски математичар

ћи да је био први прави геометричар. Почетак 19. века донео је буђење и успон пројективне геометрије. Како наш визуелни свет има геометрију ближу пројективном неголи еуклидском простору, математичари су почели све више да верују у бесконачно далеке тачке, доживљавајући основне концепте геометрије као пројективне. Лепота и елеганција пројективне геометрије постепено је привукла геометричаре, који су похрлили у ту златну ризницу и брзо извукли најприступачније драгоцености. Неочекиване и заборављене геометријске идеје које су датирале из 17. века, али и оне из античког доба попут Папосове⁷ теореме, поново су откривене и дубље истраживане.

Оснивач модерне пројективне геометрије био је Понселе⁸, који је преузео идеје свог учитеља Монжа и разрадио их на вишем апстрактном нивоу. Он је 1822. године у свом чувеном *Трактату* [64] изучавао особине које остају инваријантне под пројекцијама, а његов рад садржи све основне идеје карактеристичне за пројективну геометрију, као што су хармонијска четворка, перспективитети, пројективитети, инволуција, а такође је увео бесконачно далеку праву дуж које се секу међусобно паралелне праве.

Пројективна геометрија постала је синоним за модерну геометрију 19. века, а у почетним деценијама главне улоге играли су геометричари из Француске и Немачке. Поред Понселеа, француску школу пројективних геометричара заступали су Карно⁹, Сервоа¹⁰, Жергон¹¹, Бријаншон¹² и Шал¹³, док су Немачку представљали Мебијус¹⁴, Штајнер¹⁵, Пликер¹⁶ и Штаут¹⁷.

Значајна ствар у пројективној геометрији збила се касних двадесетих година 19. века када су уведене хомогене координате, за шта су сасвим независно заслужни Мебијус, Фојербах¹⁸, Бобије¹⁹ и Пликер. Хомогене координате и њихова предност да лепо представљају бесконачно далеке тачке, омогућило је плодну примену аналитичке методе у пројективној геометрији. Пројективној геометрији тако се могло приступити на два начина, аналитички и синтетички.

Аналитичари су радо употребљавали аналитичке и алгебарске технике из других области математике, док су геометријске релације изражавали преко координата и једначина. Уводне радове у аналитичку пројективну геометрију дали су Мебијус и Пликер, а поред њих, у групу геометричара који су фаворизовали аналитички приступ спадају Шал, Кејли²⁰ и Салмон²¹.

Синтетичари су били инспирисани Аполонијем²² и заступали чисто геометријске методе. Водич им је била интуиција, а логика инструмент за строго формално резонување, док су избегавали алгебру и мерења. Водећи геометричари који су фаворизовали синтетички приступ били су Понселе, Карно, Штајнер, Штаут и Кремона²³. Штајнер је проучивши сву тада постојећу литературу у Европи, систематски и

⁷Папос из Александрије, Πάπλος (3. век н.е.), грчки математичар

⁸Jean-Victor Poncelet (1788–1867), француски инжењер и математичар

⁹Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823), француски политичар, инжењер и математичар

¹⁰Francois-Joseph Servois (1767–1847), француски свештеник и математичар

¹¹Joseph Diaz Gergonne (1771–1859), француски математичар

¹²Charles Julien Brianchon (1783–1864), француски математичар и хемичар

¹³Michel Chasles (1793–1880), француски математичар

¹⁴August Ferdinand Möbius (1790–1868), немачки математичар

¹⁵Jakob Steiner (1796–1863), швајцарски математичар

¹⁶Julius Plücker (1801–1868), немачки математичар и физичар

¹⁷Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867), немачки математичар

¹⁸Karl Wilhelm Feuerbach (1800–1834), немачки математичар

¹⁹Étienne Bobillier (1798–1840), француски математичар

²⁰Arthur Cayley (1821–1895), британски математичар

²¹George Salmon (1819–1904), ирски математичар и теолог

²²Аполоније из Пергама, Απολλώνιος (3. век п.н.е.), грчки математичар и астроном

²³Luigi Cremona (1830–1903), италијански математичар

синтетички изградио пројективну геометрију и поставио јој темеље као самосталној науци. Након тога, Штаут [71] је у потпуности прихватио строги приступ и покушао да теорију заснује само на аксиомама инциденције, док су његови претходници говорили о метрици, угловима и другим објектима који немају улогу у пројективној геометрији.

Шал, који се није либио да користи аналитички приступ и суштински био аналитичар, бранио је синтетички приступ. За њега се може рећи да је мислио аналитички, али је своје доказе излагао геометријски, што је био комбиновани приступ који су касније употребљавали и други математичари [46, стр. 850]. У комбиновани метод можемо укључити и оригиналност коју је испољио Ли²⁴, који је мислио синтетички док је резултате желео да презентује аналитички [73, стр. 54].

Еуклидови *Елементи* били су прва аксиоматизација математике. Међутим, тек пред крај 19. века, они су доживели строге преправке које су попуниле многе рупе у дефиницијама и доказима. Највећи утицај на математичку јавност у области аксиоматике остварио је Хилберт²⁵, написавши *Основе геометрије* [41]. Крајем 19. века развој пројективне геометрије био је готово потпуно заокружен захваљујући радовима које су дали Фано²⁶ и Пјери²⁷, а у којима су аксиоматски засновали пројективну геометрију по узору на Штаута.

За даље читање и продубљивање знања и историје пројективне геометрије препоручујемо следеће ауторе: Коксетер²⁸ [20], Хјуз²⁹ и Пајпер³⁰ [42], Хартсхорн³¹ [38], Веблен³² и Јанг³³ [76], Рихтер-Геберт³⁴ [67], Клајн³⁵ [46], Хејтинг³⁶ [40], Страум³⁷ [73].

Што се тиче развоја пројективне геометрије на подручју бивше Југославије, напоменимо да су први аутори били Ниче³⁸ [59] и Првановић³⁹ [66]. Још неки аутори на нашим просторима су: Митровић⁴⁰ [55], Бокан⁴¹ и Вукмировић⁴² [11]. Међутим, концептуално и суштински, можемо препоручити *Пројективну геометрију* коју је написао Палман⁴³ [60].

Што се тиче практичне примене пројективне геометрије у задацима, на нашим просторима постоји неколико збирки задатака. За синтетички приступ може се консултовати Алимпић⁴⁴, Бокан и Шнајдер⁴⁵ [2], а за аналитички Вукмировић и Станић⁴⁶ [75].

²⁴Marius Sophus Lie (1842–1899), норвешки математичар

²⁵David Hilbert (1862–1943), немачки математичар

²⁶Gino Fano (1871–1952), италијански математичар

²⁷Mario Pieri (1860–1913), италијански математичар

²⁸Harold Scott MacDonald Coxeter (1907–2003), британско-канадски математичар

²⁹Daniel R Hughes (1927–2012), америчко-британски математичар

³⁰Fred C Piper, британски математичар

³¹Robin Hartshorne (1938), амерички математичар

³²Oswald Veblen (1880–1960), амерички математичар

³³John Wesley Young (1879–1932), амерички математичар

³⁴Jürgen Richter-Gebert (1963), немачки математичар

³⁵Morris Kline (1908–1992), амерички геометричар

³⁶Arend Heyting (1898–1980), холандски математичар и логичар

³⁷Eldar Jens Straume (1946), норвешки геометричар

³⁸Vilko Niče (1902–1987), хрватски геометричар

³⁹Милева Првановић (1929–2016), српска геометричарка

⁴⁰Милан Митровић, српски математичар

⁴¹Неда Бокан (1947), српска геометричарка

⁴²Срђан Вукмировић (1971), српски геометричар

⁴³Dominik Palman (1924–2006), хрватски геометричар

⁴⁴Бранка Алимпић (1935), српска математичарка

⁴⁵Загорка Шнајдер (1926–2003), српска математичарка

⁴⁶Зоран Станић (1975), српски математичар

2.1 Аксиоматски метод

Развој математике неизбежно је пратила човекова жеља да систематизује сопствена знања. Ова тенденција посебно је упечатљива код античких Грка, где кулминира систематизацијом геометрије у Еуклидовим *Елементима*. Грчки математичари су геометрију постепено претварали у аксиоматску теорију, која код Еуклида достиже свој коначни облик. Много векова његови *Елементи* сматрани су за модел савршене математичке теорије, а тек пред крај 19. века, доживели су строге преправке које су попуниле многе рупе у дефиницијама и доказима.

У теорији нове појмове уводимо **дефиницијама**, чиме их описујемо преко неких већ познатих појмова. На самом почетку *Елемената*, Еуклид покушава да дефинише све геометријске појмове којима ће се бавити. Међутим, у питању нису строге дефиниције већ само кратка објашњења елементарних геометријских појмова, изложена са намером да у свести читаоца створе интуитивне представе [53, стр. 41]. Да бисмо спречили зачаран круг (дефинисање једног појма преко другог, а тог другог преко првог, те тако у круг) неке појмове морамо прихватити као основне и њих не дефинишемо. Основне појмове делимо у две класе, на основне објекте (као што су тачке, праве, равни) и основне релације између тих објеката (као што су инцидентност, између, подударност).

Тврђење у аксиоматској теорији је исказ у којем се јављају само основни појмови теорије као и логички појмови. Аксиоматски метод се користи да пружи поуздане и објективне разлоге зашто је нека хипотеза о математичким објектима истинита. Он се заснива на логичко дедуктивној аргументацији која утврђује **доказе** за нека тврђења у теорији коју посматрамо. Докази тврђења су аргументи базирани на истинитости претходно доказаних тврђења, али како та претходна тврђења такође захтевају претходно доказана тврђења, морамо избећи бесконачни регрес (бесконачна хијерархија нових и нових тврђења неопходних за доказивање оних претходних). Због тога теорију заснивамо на основним тврђењима која не захтевају доказ и зовемо их **аксиоме** теорије. Дакле, тврђење важи ако је у питању аксиома или уколико је дедуктивно изведено из аксиома, те тада кажемо да је оно **теорема** (или **лема** уколико јој је примарна улога да установи значајан корак у доказу неке будуће теореме).

Основни појмови у аксиоматској теорији остају непрецизирани, док аксиоме можемо сматрати њиховим имплицитним дефиницијама. Свако окружење у којем основни појмови имају интерпретацију у којој све аксиоме теорије важе зовемо **модел** те теорије. Историјски, барем неки модели аксиоматске теорије претходе теорији. На пример, Еуклид је желео да избегне произвољност у интерпретацији основних појмова јер није могао да дозволи да тачке, праве и равни буду интерпретиране било како другачије до онако како је то чињено у Платонов⁴⁷ Академији [53, стр. 43].

Међутим, у модерној аксиоматици која потиче од Хилберта, аксиома се више не посматра као несумњива истина до које стижемо интуицијом. Поента је да ми не изучавамо објекте, већ релације између објеката у којима се види сама суштина математичког концепта. Према томе, геометријска аксиоматизација подразумева уклањање било какве зависности од објеката реалног света са којима је првобитно могла бити повезана. Хилберт је, ако је веровати његовом ученику Блументалу⁴⁸, под утицајем апстрактног погледа на геометријске појмове изјавио да математичар мора увек бити у стању да уместо *тачке, праве и равни*, говори *штолови, штолице и криле за живо* [9, стр. 402–403].

⁴⁷ Платон, Πλάτων (4. и 5. век п.н.е), грчки филозоф и беседник

⁴⁸ Ludwig Otto Blumenthal (1876–1944), немачки математичар

Наравно, овакав апстрактни приступ није уклонио слике из геометријских књига. Ако је књига добро написана слике могу бити изостављене без губитка доследности. Оне нису од суштинске важности, а њихов главни циљ је да нам олакшају памћење, праћење и разумевање сложених доказа. Са друге стране, слике увек прете да нас наведу на погрешан пут некоректном употребом просторне интуиције. Морамо бити јако обазриви због ове опасности која је проузроковала многе грешке чак и у одличним радовима из аксиоматике [40, стр. 4].

Уколико изведемо неку теорему у некој аксиоматској теорији, ми смо такође доказали теореме одговарајуће почетној у свим моделима теорије. На овај начин аксиоматски метод нам дозвољава огромну уштеду на доказима. Свака теорема у теорији је тачна у сваком моделу теорије, али тврђење може бити тачно у неком моделу, а да није у питању теорема. Посебну пажњу у књизи обратимо на моделе теорије што оправдавају следеће особине аксиома на које се често фокусирамо.

За аксиоматску теорију кажемо да је **нейроћивречна** уколико се из ње не може извести логичка контрадикција, односно уколико не постоји неко тврђење за које су и оно и његова негација теореме у тој теорији. Најлакши начин да докажемо непротивречност теорије је да обезбедимо неки њен модел. За аксиому кажемо да је **независна** уколико се не може доказати ни оповргнути из осталих аксиома теорије. Аксиоматска теорија је **независна** уколико је свака од њених аксиома независна. Независност аксиоме уобичајено се доказује конструкцијом модела у којем важе све аксиоме осим те. Уколико се свако тврђење у теорији или његова негација могу доказати кажемо да је теорија **ћоћћуна**. Дакле, у потпуној теорији не постоји тврђење које можемо додати на систем аксиома и тако добити непротивречну теорију. Уколико су свака два модела аксиоматске теорије изоморфна (суштински, постоји само један модел теорије) кажемо да је она **каћећорична**. Категорична теорија је обавезно потпуна, али обрат не мора да важи. У неким ситуацијама категоричност није захвална особина јер се теорија не може даље уопштавати.

2.2 Аксиоме пројективне равни

Пројективну геометрију равни заснивамо као аксиоматску теорију, те најпре уводимо основне појмове. Посматрамо два основна скупа и њих обележавамо са $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$. Елементе скупа $\mathcal{T}$ зовемо **ћачке** и обележавамо великим латиничним словима: $A, B, C, D, \dots$ док елементе скупа $\mathcal{P}$ зовемо **ћправе** и обележавамо малим латиничним словима: $a, b, c, d, \dots$. Између ових скупова уводимо основну релацију $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{T} \times \mathcal{P}$ коју зовемо **релација инцидентције**.

Реченица „Тачка A је инцидентна са ћправом p “ има симболички запис $A\mathcal{I}p$ или $(A, p) \in \mathcal{I}$, а еквивалентно можемо рећи „Љправа p је инцидентна са ћтачком A “ или записати $p\mathcal{I}A$. Често се по узору на интуитивну равна, уколико не постоји могућност забуне, користи интуитивни начин изражавања. На пример, претходне реченице можемо исказати са „Тачка A лежи на ћправој p “ или „Тачка A ћприћада ћправој p “, у ознаци $A \in p$, односно са „Љправа p ћролази кроз ћтачку A “ или „Љправа p садржи ћтачку A “, у ознаци $p \ni A$.

Уколико тачка A није инцидентна са правом p , можемо писати $A\not\mathcal{I}p$ или $(A, p) \notin \mathcal{I}$. Та негација се интуитивно може исказати убацивањем речце „не“ на одговарајуће место (не лежи, не ћприћада, не ћролази кроз, не садржи), односно записати $A \notin p$.

Из полазних појмова дефиницијама можемо добити нове изведене појмове. Ако постоји заједничка права са којом су инцидентне неке тачке, онда за те тачке кажемо да су **колинearне**. Ако постоји заједничка тачка са којом су инцидентне неке праве, онда за те праве кажемо да су **конкурентне**. Често наглашавамо ту заједничку тачку или преко ње правдамо конкурентност правих, те кажемо да су праве

конкурентне у тој заједничкој тачки.

Законитости које важе између основних појмова у геометрији описују се аксиомама. Уобичајено је да се најпре поставе аксиоме инциденције (аксиоме везе) које описују основне особине релације инциденције. У свакој геометрији је такође уобичајено да се најпре постави следећа аксиома.

Аксиома 2.1. *Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите тачке.*

Ова аксиома заправо је обједињење прве две Хилбертове аксиоме. Прве, која каже да постоји права која пролази кроз две различите тачке, и друге, по којој не постоји више од једне такве праве. За различите тачке A и B , јединствену праву из Аксиоме 2.1 која их садржи зовемо **спојница тачака** A и B и обележавамо са AB . Тако добијамо **операцију спајања** која двома различитим тачкама додељује одговарајућу праву, њихову спојницу.

Непосредна последица Аксиоме 2.1 је да праву одређују било које две њене тачке, односно ако су C и D различите тачке праве AB , тада су A и B тачке праве CD . Такође важи да две различите праве не могу имати више од једне заједничке тачке, односно са две различите праве може бити инцидентна највише једна тачка. Додатно можемо рећи да су сваке две тачке колинеарне.

Упечатљива одлика пројективне геометрије је симетрија у улогама које играју тачке и праве у дефиницијама и теоремама. Овде до изражаја долази апстрактни поглед на аксиоматску геометрију, те овој симетрији можемо приступити кроз језик. Свако тврђење у пројективној равни (исказ који укључује тачке, праве и инциденцију између њих) може се модификовати тако што речи тачка и права замене места, при чему се евентуално изврше потребне граматичке корекције.

Дуално тврђење неком тврђењу је тврђење које се добија заменом речи тачка и права у почетном тврђењу. Прецизније речено, реч „тачка“ мења се речју „права“, а реч „права“ мења се речју „тачка“. Важно је напоменути да уколико тврђење садржи додатне термине морамо извршити и додатне промене у складу са њиховим дефиницијама. На пример, за добијање дуалног тврђења морамо у почетном тврђењу узајамно заменити речи „лежи на“ са „пролази кроз“, „припада“ са „садржи“, а „колинеарно“ са „конкурентно“. Симетрија између скупова T и P коју смо најавили види се кроз такозвани Принцип дуалности.

Тврђење 2.1 (Принцип дуалности). *Ако је неко тврђење теорема, онда је њему дуално тврђење такође теорема.*

Принцип дуалности је метатеорема јер је заправо пре теорема о математици неголи теорема унутар саме математике. Другим речима, Принцип дуалности је теорема о теоремама. Доказ ове веома јаке теореме врши се провером дуалних тврђења за све аксиоме у теорији, које свакако важе уколико је Принцип дуалности на снази. Ако је неко тврђење теорема, то за њега постоји доказ изведен из аксиома. Уколико читав доказ преведемо дуално, добијамо доказ дуалног тврђења расписан преко дуала аксиома, које се даље расписују преко самих аксиома, одакле следи да је дуално тврђење теорема.

Претходна дискусија говори да Принцип дуалности важи ако и само ако је дуал сваке аксиоме валидан. Како желимо да Принцип дуалности стално имамо на располагању, погледајмо како гласи дуал Аксиоме 2.1 и уведимо га као нову аксиому.

Аксиома 2.2. *Постоји јединствена тачка која је инцидентна са две различите праве.*

Подсетимо се апсолутне геометрије равни, у којој се уводи појам паралелности, где кроз тачку ван праве постоји права која не сече почетну праву. У еуклидској равни постоји тачно једна таква права (Плејферова⁴⁹ аксиома), док у хиперболичкој

⁴⁹John Playfair (1748–1819), шкотски научник и математичар

равни имамо бар две такве праве (аксиома Лобачевског⁵⁰). Међутим, у пројективној равни такве праве не постоје, јер Аксиома 2.2 каже да се сваке две различите праве секу, што уједно значи и да нема паралелних правих.

Напоменимо да се Аксиома 2.2 може ослабити тако да гарантује само егзистенцију заједничке тачке јер јединственост онда следи из раније поменуте особине Аксиоме 2.1. Међутим, како желимо упечатљив поглед на Принципи дуалности одлучили смо да као аксиому ипак задржимо директан дуал Аксиоме 2.1.

За различите праве p и q , јединствену тачку из Аксиоме 2.2 која им припада зовемо **сецишће њравих** (пресечна тачка) p и q и обележавамо са $p \wedge q$. Тако добијамо **операцију сечења** која два различитим правама додељује одговарајућу тачку, њихово сециште. Приметимо да су спајање и сечење дуалне операције, односно да су спојница и сециште дуални појмови.

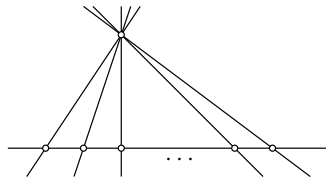
Како празни скупови, $\mathcal{T} = \mathcal{P} = \mathcal{I} = \emptyset$ очигледно испуњавају обе аксиоме, потребна нам је аксиома која гарантује егзистенцију основних објеката од којих можемо почети постепено да градим теорију.

Аксиома 2.3. *Постоје четири тачке међу којима нема три колинеарне.*

Аксиома 2.3 служи да поред већ наведених празних скупова елиминира још неке неинтересантне случајеве. Уколико важи Аксиома 2.1 и Аксиома 2.2, али не и Аксиома 2.3, кажемо да је у питању **дегенерисана пројективна равн**, а једноставном претрагом по могућим случајевима, испоставља се да граде две суштински различите фамилије.

Пример 2.1. Прва фамилија дегенерисаних равни представља се тачком T која није инцидентна са правом p , тако да постоји произвољан (не нужно коначан) скуп Λ и колинеарне тачке T_α за $\alpha \in \Lambda$ инцидентне са p , као и праве које су спојнице тачке T са сваком од тачака T_α . Строго формално ову фамилију можемо записати са

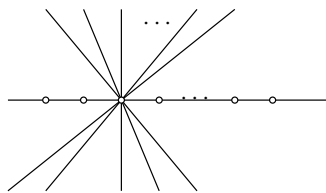
$$\mathcal{T} = \{T\} \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{T_\alpha\}, \quad \mathcal{P} = \{p\} \cup \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{p_\alpha\}, \quad \mathcal{I} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{(T, p_\alpha), (T_\alpha, p_\alpha), (T_\alpha, p)\}.$$



Приметимо да је број тачака равни из ове фамилије једнак броју правих, те је њој дуална равн истог типа.

Друга фамилија дегенерисаних равни представља се са два произвољна скупа индекса Λ и Σ , тако да су све тачке T_α за $\alpha \in \Lambda$ колинеарне, а све праве p_β за $\beta \in \Sigma$ конкурентне. Формално можемо записати

$$\mathcal{T} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{T_\alpha\}, \quad \mathcal{P} = \bigcup_{\beta \in \Sigma} \{p_\beta\}, \quad \mathcal{I} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{(T_\alpha, p)\} \cup \bigcup_{\beta \in \Sigma} \{(T, p_\beta)\}, \text{ за неко } T \in \mathcal{T}, p \in \mathcal{P}.$$



⁵⁰Николай Иванович Лобачевский (1792–1856), руски математичар

Посебно, у случају $\Lambda = \emptyset \neq \Sigma$ имамо само једну праву, односно $\mathcal{P} = \{p\}$, $\mathcal{T} = \mathcal{I} = \emptyset$, док у случају $\Lambda \neq \emptyset = \Sigma$ имамо само једну тачку $\mathcal{T} = \{T\}$, $\mathcal{P} = \mathcal{I} = \emptyset$, те већ виђено $\mathcal{T} = \mathcal{P} = \mathcal{I} = \emptyset$ за $\Lambda = \Sigma = \emptyset$. $\triangle$

Пројективна раван је модел система $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ који испуњава Aksiome 2.1, 2.2 и 2.3. Систем тачака и правих са релацијом инциденције који испуњава наведене аксиоме је пројективна раван, а како смо укључили Aksiomu 2.3 можемо рећи да је она недегенерисана. Размотримо какав утицај на Принцип дуалности има увођење нове аксиоме. Како су Aksioma 2.1 и Aksioma 2.2 једна другој дуалне остаје провера да ли важи дуал Aksiome 2.3, односно да ли постоје четири праве међу којима нема три конкурентне.

Како по Aksiomi 2.3 постоје тачке A, B, C, D међу којима нема три колинеарне, оне су све различите. По Aksiomi 2.1 постоје праве $A \vee B, B \vee C, C \vee D, D \vee A$, а испоставља се да оне испуњавају тражене услове. Претпоставимо супротно, да међу њима постоје три конкурентне, те нека су, не умањујући општост, $A \vee B, B \vee C$ и $C \vee D$ инцидентне са неком тачком S . Ако је $S = B$, због $SI(C \vee D)$ имамо колинеарне B, C, D . Иначе је $S \neq B$, одакле из $SI(A \vee B)$ и $SI(B \vee C)$ добијамо $A \vee B = S \vee B = B \vee C$, те су колинеарне A, B, C . Овом контрадикцијом показали смо да ако је $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ пројективна раван, онда је то и $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{I})$, што доказује Принцип дуалности.

Теорема 2.2. *У пројективној равни важи Принцип дуалности.*

Принцип дуалности је веома користан, можемо га механички применити на свако тврђење у теорији и тако добити нове резултате. Некад је резултат еквивалентан почетној теорему, некад њеном обрату, али често је у питању нов резултат, тако да у принципу можемо сматрати да се на овај начин број теорема удвостручује. Код увођења нових аксиома увек имамо у виду Принцип дуалности (Тврђење 2.1), те ћемо за сваку нову аксиому испитивати њен дуал.

Откриће Принципа дуалности везује се за двадесете године 19. века и два имена. Принцип дуалности први је експлицитно поставио Жергон у [34] који је уједно и увео термин дуалност да би означио везу између оригиналне и њој дуалне теореме. Са друге стране, Понселе је нешто раније увидео дуалност у вези пола и поларе изучавајући конике, о чему је писао у [64], а онда формулисао општији метод у [65]. Између њих двојице уследио је дуг и непријатан спор по питању приоритета на откриће Принципа дуалности. Са становишта модерне аксиоматике Принцип дуалности је прилично очигледна ствар, али док је пројективна геометрија била у повоју није било коректне формалне теорије, те је тада дуалност била далеко од очигледног.

2.3 Интуитивна пројективна раван

Еуклидски простор, који познајемо из елементарне геометрије, обједињује како очигледне, тако и оне неочигледне геометријске особине објеката који постоје у стварном свету око нас. Еуклидска раван тако представља раван дводимензиони простор који даје сложен и прилично добар опис стварног света заснован на нашем геометријском опажању и искуству. Међутим, постојање паралелних правих оповргава Aksiomu 2.2, тако да еуклидска раван свакако није пројективна раван.

Еуклидска раван укључује приличан број ствари које можемо да меримо, попут растојања, углова и површина. Ако се одрекнемо те метричке структуре и задржимо само концепт инциденције, остаје нам лепа и нетривијална геометрија афине равни. Нека је $\mathbb{E} = (\mathcal{T}_{\mathbb{E}}, \mathcal{P}_{\mathbb{E}}, \mathcal{I}_{\mathbb{E}})$ еуклидска афина раван, где су $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ тачке, $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ праве, а $\mathcal{I}_{\mathbb{E}}$ њена релација инциденције.

Реализација пројективне равни врши се кроз модел који испуњава уведене аксиоме инциденције. Како основни проблем еуклидске равни лежи у Аксиоми 2.2, потребно је измислити неке додатне тачке у којима ће се сећи паралелне праве. То можемо остварити тако што за тачке нове равни прогласимо праменове правих у равни $\mathbb{E}$. Иако на први поглед ова конструкција делује прилично апстрактно, прамен конкурентних правих које се секу у некој тачки из $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ природно се може поистоветити са том тачком. У еуклидској равни праменови правих се јављају у два облика, а осим праменова конкурентних правих постоје и праменови паралелних правих, што је додатак који оживљава Аксиому 2.2.

Дакле, тачке нове равни су праменови правих у $\mathbb{E}$, праве смо задржали, док нову релацију инциденције уводимо на природан начин. Неки прамен правих, као тачка нове равни, биће инцидентан са правом уколико је садржи, односно ако је та права једна од правих из почетног прамена. Свакој правој у овој конструкцији придружимо додатну тачку која представља прамен правих паралелних са њом. Тако су паралелне праве инцидентне са таквом заједничком тачком за коју кажемо да је **бесконачна тачка** (**бесконачно далека тачка** [55], **бескрајно далека тачка** [66], **неизмерно далека тачка** [59], **идеална тачка**, **нејрава тачка** [60]).

Свака права $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$, осим регуларних тачака које јој припадају, садржи и бесконачну тачку $\infty_{[p]}$, где је $[p]$ класа еквиваленције свих правих паралелних са p . Додатно уводимо **бесконачну праву** која садржи све бесконачне тачке, а коју уобичајено обележавамо са u_{∞} . Овако дефинисане основне скупове и релације можемо формализовати са

$$\mathcal{T}_{\infty} = \mathcal{T}_{\mathbb{E}} \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}} \{\infty_{[p]}\}, \quad \mathcal{P}_{\infty} = \mathcal{P}_{\mathbb{E}} \cup \{u_{\infty}\}, \quad \mathcal{I}_{\infty} = \mathcal{I}_{\mathbb{E}} \cup \bigcup_{p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}} \{(\infty_{[p]}, p), (\infty_{[p]}, u_{\infty})\}.$$

Да ли овако конструисан интуитивни модел $\mathbb{EP}^2 = (\mathcal{T}_{\infty}, \mathcal{P}_{\infty}, \mathcal{I}_{\infty})$ заиста испуњава све аксиоме пројективне равни?

Како постоје два типа тачака (обичне и бесконачне), за различите тачке из Аксиоме 2.1 дискутујемо три случаја. Ако су обе тачке из $\mathcal{T}_{\mathbb{E}}$ то по еуклидској аксиоми постоји јединствена права из $\mathcal{P}_{\mathbb{E}}$ која је са њима инцидентна. Та права је по дефиницији и права из $\mathcal{P}_{\infty}$ која их садржи, док их додатна права u_{∞} не садржи, јер је инцидентна само са бесконачним тачкама. Ако је једна тачка $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{E}}$, а друга $\infty_{[p]}$ за неко $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{E}}$, то по Плејферовој аксиоми постоји јединствена еуклидска права q кроз A која је паралелна са p , односно $\infty_{[p]} = \infty_{[q]}$. Коначно, ако су обе тачке бесконачне, јединствена права кроз њих је очигледно u_{∞} , док све остале праве садрже само једну бесконачну тачку.

За различите праве из Аксиоме 2.2 такође имамо дискусију. Ако су обе праве p и q еуклидске и међусобно паралелне, њима одговара јединствена тачка $\infty_{[p]} = \infty_{[q]}$. Ако су обе праве еуклидске и нису паралелне, онда имају обичан еуклидски пресек и то је јединствена тачка. Пресек праве u_{∞} и еуклидске праве p је јединствена тачка $\infty_{[p]}$.

За испуњење Аксиоме 2.3 довољно је једноставно изабрати четири темена произвољног квадрата, те она очигледно важи. Испитали смо све три аксиоме и самим тим показали да је интуитивна пројективна равна $\mathbb{EP}^2 = (\mathcal{T}_{\infty}, \mathcal{P}_{\infty}, \mathcal{I}_{\infty})$ заиста пројективна равна.

Теорема 2.3. *Интуитивни модел $\mathbb{EP}^2$ јесте пројективна равна.*

Аксиоме 2.1, 2.2 и 2.3 чине минимални скуп аксиома пројективне равни, а касније уводимо друге аксиоме које пројективну равна ближе повезују са њеним геометријским пореклом. У анализи интуитивног модела $\mathbb{EP}^2$ нису нам биле потребне све аксиоме еуклидске геометрије, већ само аксиоме инциденције у пакету са Плејферовом аксиомом јер смо еуклидску равна посматрали као афину равна. Приметимо

да је еуклидска геометрија равни само један подскуп пројективне геометрије равни. Интуитивни модел $\mathbb{RP}^2$ нам зато омогућава да задатке из еуклидске равни пребацимо у пројективну раван, тамо их решимо, те на крају закључке вратимо назад у еуклидску раван, што је процедура коју обилато користимо у задацима.

Историјски, концепт бесконачне тачке потиче са почетка 17. века. Прво се појавио код Кеплера [45, стр. 93] који 1604. помиње да парабола има две жиже од којих је једна бесконачно далека, а налази се у пресеку правих паралелних оси. Са друге стране, Дезарг [22] је 1639. у свом делу писао како паралелне праве имају заједнички завршетак на бесконачној удаљености.

2.4 Аналитичка пројективна раван

Иако се бесконачна права интуитивне пројективне равни (проширене еуклидске равни) $\mathbb{RP}^2$ јавља на специфичан начин, њена унутрашња природа не разликује се од оне коју имају остале праве. Конструкција те пројективне равни на другачији начин показује да се праве геометријски не разликују. Основна идеја конструкције је да посматрамо тродимензиони векторски простор, те да тачке пројективне равни буду праве које пролазе кроз координатни почетак, а да праве буду равни које пролазе кроз координатни почетак. Најважнији случај тиче се векторског простора над пољем реалних бројева, али како конструкција пролази за произвољно поље, држаћемо се уопштене приче.

Нека је $\mathbb{F}$ произвољно поље. Посматрајмо $\mathbb{F}^3$, скуп свих уређених тројки елемената из $\mathbb{F}$, који има структуру тродимензионог векторског простора над $\mathbb{F}$. За произвољно ненула $x \in \mathbb{F}^3$, праву кроз координатни почетак која садржи x описује скуп $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{F}\}$, што је векторски потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије један. Сасвим слично, за линеарно независне x и y из $\mathbb{F}^3$, раван кроз координатни почетак која их садржи описује скуп $\{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{F}\}$, а он је векторски потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије два. Овај дводимензиони потпростор садржи једнодимензионе потпросторе облика $\text{Span}\{\lambda x + \mu y\}$, где су λ и μ фиксирани скалари, при чему различит избор λ и μ који су у истом односу одређују исти потпростор.

Строго формално основне елементе пројективне равни над пољем $\mathbb{F}$ можемо дефинисати на следећи начин:

$\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ представља једнодимензионе потпросторе од $\mathbb{F}^3$;
 $\mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ представља дводимензионе потпросторе од $\mathbb{F}^3$;
 Инциденција $UI_{\mathbb{F}}V$ значи да је $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ потпростор од $V \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$.

Конкретну координатну репрезентацију векторских потпростора од $\mathbb{F}^3$ добијамо као класу уређених тројки ненула вектора из $\mathbb{F}^3$ које сечемо по релацији сразмерности $\propto$. У питању је релација еквиваленције $\propto$, за коју важи $(x_1, x_2, x_3) \propto (y_1, y_2, y_3)$ ако и само ако постоји ненула скалар $\lambda \in \mathbb{F}$ такав да је $y_i = \lambda x_i$ за $i \in \{1, 2, 3\}$. Скуп свих класа еквиваленције ове релације означимо са

$$\mathcal{K} = \mathbb{F}^3 \setminus \{0\} / \propto = \mathbb{F}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} / \mathbb{F} \setminus \{0\}.$$

Ако је потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије један, он је генерисан неким ненула вектором (x_1, x_2, x_3) . Скуп тачака је $\mathcal{T}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$, а уколико $A \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ има вектор представник (x_1, x_2, x_3) кажемо да тачка A има **хомојене координате** $(x_1 : x_2 : x_3)$.

Потпростор од $\mathbb{F}^3$ димензије два је облика $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}^3 : u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0\}$ за неки ненула вектор нормале $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{F}^3$ који је једнозначан до на сразмерност. Овако се успоставља бијекција између дводимензионих и једнодимензионих векторских потпростора од $\mathbb{F}^3$, што нам омогућава да праве такође видимо као скуп

$\mathcal{P}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$, а уколико $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ има вектор нормале (u_1, u_2, u_3) кажемо да права p има **хомогене координате** $[u_1 : u_2 : u_3]$.

Скупове $\mathcal{T}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$ и $\mathcal{P}_{\mathbb{F}} = \mathcal{K}$ треба схватити као дисјунктне копије простора $\mathcal{K}$. За рад у аналитичком моделу погодно је увести ознаке за вектор представник елемента из $\mathcal{K}$, јер он одређује његове хомогене координате. Вектор представник тачке или праве обележаваћемо стрелицом изнад. Конкретно, $\vec{X}$ означава неки вектор представник тачке X , док $\vec{x}$ означава неки вектор представник праве x . Како тачке и праве имају много вектора представника (сви они су међусобно сразмерни), уколико је битно који смо од њих фиксирали, то посебно наглашавамо. Повратак са вектора на тачку или праву можемо извести користећи угласте заграде за класу еквиваленције, на пример $[\vec{X}] = X$, односно $[\vec{x}] = x$.

Векторе уједно сматрамо и колона матрицама, што нам омогућава да неке изразе или системе једначина једноставно запишемо у матричном облику. При том на располагању имамо стандардну векторску алгебру у тродимензионом векторском простору (скаларни, векторски и мешовити производ из Секције 1.2).

Преостаје испитати релацију инциденције $\mathcal{I}_{\mathbb{F}}$. Једнодимензиони простор $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ садржан је у дводимензионом простору $V \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ ако је U један од праваца у V , што се дешава кад је U нормалан на вектор нормале од V . Тако је тачка $A = (x_1 : x_2 : x_3) \in \mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ инцидентна са правом $p = [u_1 : u_2 : u_3] \in \mathcal{P}_{\mathbb{F}}$ и пишемо $A \mathcal{I}_{\mathbb{F}} p$ ако и само ако је $\vec{A} \cdot \vec{p} = 0$, што је еквивалентно са $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$, односно са $(\vec{p})^T \vec{A} = (\vec{A})^T \vec{p} = 0$.

Овако смо описали аналитички модел пројективне равни $\mathbb{F}\mathbb{P}^2 = (\mathcal{T}_{\mathbb{F}}, \mathcal{P}_{\mathbb{F}}, \mathcal{I}_{\mathbb{F}})$, што доказујемо провером уведених аксиома. Нека су $A = (a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_1 : b_2 : b_3)$ различите тачке из Аксиоме 2.1. Права $p = [u_1 : u_2 : u_3]$ инцидентна је и са A и са B ако и само ако важи $\vec{A} \cdot \vec{p} = 0$ и $\vec{B} \cdot \vec{p} = 0$, што матрично записујемо са

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица са леве стране је ранга два јер се састоји од линеарно независних вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$ који су уписани у врсте. Самим тим, простор решења матричне хомогене једначине је потпростор димензије један, те постоји јединствена права $[u_1 : u_2 : u_3]$ са траженим особинама.

Проверили смо Аксиому 2.1, а сасвим слично, из дуалних симетрија, проверавамо Аксиому 2.2. Коначно, за Аксиому 2.3 довољно је приметити да међу тачкама $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : 1 : 1)$ нема три колинеарне.

Овим смо показали да свако поље $\mathbb{F}$ генерише један аналитички модел пројективне равни $\mathbb{F}\mathbb{P}^2 = (\mathcal{T}_{\mathbb{F}}, \mathcal{P}_{\mathbb{F}}, \mathcal{I}_{\mathbb{F}})$, што нам омогућава да повежемо геометрију са алгебром и тако многе резултате добијемо директним рачуном. Напоменимо да претходни аргументи пролазе и за произвољно тело $\mathbb{F}$, тако што посматрамо $\mathbb{F}^3$ као модул над $\mathbb{F}$ и његове подмодуле, што разматрамо касније (видети Теорему 3.37).

Теорема 2.4. *Аналитички модел $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ је пројективна равна за свако поље $\mathbb{F}$.*

Пројективна равна над пољем $\mathbb{F}$ је аналитичка пројективна равна $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$, док се у литератури среће и ознака $PG(2, \mathbb{F})$. Провера аксиома за $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$ може се конкретизовати до краја, односно можемо прецизно изразити две основне операције генерисане аксиомама, операцију спајања $\vee$ и операцију сечења $\wedge$.

Нека су $A = (a_1 : a_2 : a_3)$ и $B = (b_1 : b_2 : b_3)$ различите тачке у $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$. Како су тачке A и B инцидентне са правом $p = A \vee B$, то је $\vec{p}$ нормално и на $\vec{A}$ и на $\vec{B}$, те има правац њиховог векторског производа, што нас доводи до формуле $\vec{A \vee B} \propto \vec{A} \times \vec{B}$, док конкретан рачун даје

$$p = \left[\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right].$$

Наравно, како су тачке A и B различите то су вектори $\vec{A}$ и $\vec{B}$ линеарно независни, те њихов векторски производ није нула вектор и самим тим не постоји могућност да добијемо непостојећу праву $[0 : 0 : 0]$.

Сасвим слично, нека су $p = [p_1 : p_2 : p_3]$ и $q = [q_1 : q_2 : q_3]$ различите праве у $\mathbb{P}^2$. Како су праве p и q инцидентне са тачком $A = p \wedge q$, то је A нормално и на $\vec{p}$ и на $\vec{q}$, те је $\vec{p} \wedge \vec{q} \propto \vec{p} \times \vec{q}$, док конкретан рачун даје

$$A = \left(\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \right).$$

Показали смо да се и спајање и сечење реализују као векторски производ, што је резултат који често користимо у рачуну и записујемо га у виду следеће леме.

Лема 2.5. *За различите тачке A и B у $\mathbb{P}^2$ важи $\overrightarrow{AB} \propto \vec{A} \times \vec{B}$. За различите праве p и q у $\mathbb{P}^2$ важи $\vec{p} \wedge \vec{q} \propto \vec{p} \times \vec{q}$.*

Заменом $\mathbb{F}$ неким конкретним пољем добијамо разне аналитичке пројективне равни $\mathbb{F}\mathbb{P}^2$. За $\mathbb{F}$ можемо узети поље $\mathbb{C}$ комплексних бројева или $\mathbb{Q}$ рационалних бројева и добити одговарајуће пројективне равни $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ и $\mathbb{Q}\mathbb{P}^2$. Наравно, најчешће за $\mathbb{F}$ постављамо поље $\mathbb{R}$ реалних бројева, што нас доводи до **реалне пројективне равни** $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = (\mathcal{T}_{\mathbb{R}}, \mathcal{P}_{\mathbb{R}}, \mathcal{I}_{\mathbb{R}})$. Увођењем координатног система, односно хомогених координата, боље можемо схватити раније уведено интуитивну пројективну раван $\mathbb{E}\mathbb{P}^2$ (додавање бесконачних тачака и бесконачне праве на еуклидску раван) на чист алгебарски начин.

Еуклидска раван $\mathbb{E}$ се помоћу координатне репрезентације идентификује са $\mathbb{R}^2$. Наиме, свакој тачки из $\mathbb{E}$ се придружује $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, док се свака права састоји из тачака $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$. Међутим, третирање праве као јединственог објекта, а не као скупа тачака, доводи нас до њене репрезентације преко параметара (u_1, u_2, u_3) . Напоменимо да $(0, 0, 1)$ овде не представља праву јер тада наведена једначина гласи $1 = 0$.

Посматрајмо $\mathbb{E}$ као раван смештену у еуклидски простор $\mathbb{R}^3$. То може бити раван дата једначином $x_3 = 1$, где свакој тачки еуклидске равни (x_1, x_2) одговара вектор $(x_1, x_2, 1)$. Нека је (x_1, x_2, x_3) вектор из $\mathbb{R}^3$. Ако му последња компонента није једнака нули ($x_3 \neq 0$) можемо га поистоветити са једнодимензионим потпростором који је њиме разапнут, а он сече смештену еуклидску раван у $(x_1/x_3, x_2/x_3, 1)$, односно у тачки $(x_1/x_3, x_2/x_3) \in \mathbb{E}$.

Преостали вектори су облика $(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$. Ако пођемо од тачке $(p_1, p_2) \in \mathbb{E}$ и пратимо праву са правцем (k_1, k_2) добијамо векторе облика $(p_1 + tk_1, p_2 + tk_2, 1)$. Ови вектори сразмерни су векторима $(p_1/t + k_1, p_2/t + k_2, 1/t)$, при чему кад t тежи ка $+\infty$ или $-\infty$, наш вектор тежи ка $(k_1, k_2, 0)$. Самим тим, вектори облика $(x_1, x_2, 0)$ одговарају бесконачним тачкама, или конкретније, $(x_1 : x_2 : 0)$ је бесконачна тачка која одговара правој чији је правац (x_1, x_2) .

Једначина праве у хомогеним координатама постаје $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Пресек са еуклидском равни $x_3 = 1$ даје једначину праве у равни $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3 = 0$. Једини тип вектора коме не одговара права је она са $u_1 = u_2 = 0, u_3 \neq 0$, кад једначина после дељења са u_3 постаје $x_3 = 0$. У питању је права са хомогеним координатама $[0 : 0 : 1]$ која садржи све бесконачне тачке, што је бесконачна права u_∞ .

Хомогене координате су откривене касних двадесетих година 19. века, а занимљиво је да је до њих независно дошло чак четири математичара. Мебијусова оригинална формулација хомогених координата појавила се у [56], где је увео координатни систем у којем је позиција тачке одређена центром масе (барицентром) система који се састоји од три темена троугла. Бобијије је у [10] први употребио трилинеарне координате у којима је позиција тачке одређена релативним односима растојања од три стране троугла и тако дошао до хомогених координата. Фојербах

је хомогене координате увео у својој књизи [31], његов приступ био је геометријски уместо механички, при чему је у три димензије покрио оно што је Мебијус урадио у равни. Сва тројица математичара су до својих резултата дошла сасвим независно и симултано, односно 1827. године. Нешто касније, Пликер је дошао до хомогених координата, али за разлику од својих претходника он је њима приступио на потпуно нов начин разрадивши методологију посматрања праве као елемента, а свој координатни систем описао је у [63].

Пример 2.2. Нека су тачке еуклидске равни дате својим стандардним координатама: $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(3, 0)$, $D(4, 1)$. Њиховим хомогеним координатама природно можемо доделити векторе представнике: $\vec{A} = (1, 1, 1)$, $\vec{B} = (3, 2, 1)$, $\vec{C} = (3, 0, 1)$, $\vec{D} = (4, 1, 1)$. По Леми 2.5 рачунамо спојнице $\overrightarrow{A \vee B} \propto \vec{A} \times \vec{B} = (-1, 2, -1)$ и $\overrightarrow{C \vee D} \propto \vec{C} \times \vec{D} = (-1, 1, 3)$, као и сециште $E = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ са $\vec{E} \propto (\overrightarrow{A \vee B}) \wedge (\overrightarrow{C \vee D}) \propto (\overrightarrow{A \vee B}) \times (\overrightarrow{C \vee D}) = (7, 4, 1)$. Хомогене координате тачке E су $(7 : 4 : 1)$, те су еуклидске $(7, 4)$, што значи да се праве AB и CD секу у тачки $(7, 4)$.

У случају да је $D(5, 1)$ постављамо $\vec{D} = (5, 1, 1)$, одакле је $\overrightarrow{C \vee D} \propto (-1, 2, 3)$, те за E добијамо $\vec{E} \propto (8, 4, 0)$. Тачка E има хомогене координате $(8 : 4 : 0)$, односно $(2 : 1 : 0)$, што је у еуклидском смислу бесконачно сециште паралелних правих AB и CD . $\triangle$

Пример 2.3. Нека су тачка $A = (1 : 2 : 3)$ и права $p = [3 : 2 : 1]$ еуклидске равни дате преко својих хомогених координата у интуитивној пројективној равни $\mathbb{P}^2$. Сециште бесконачне праве $u_\infty = [0 : 0 : 1]$ и p даје бесконачну тачку $\infty_{[p]} = p \wedge u_\infty$ праве p , где је $\overrightarrow{\infty_{[p]}} \propto \vec{p} \times \vec{u_\infty} \propto (2, -3, 0)$. Спојница $q = A \vee \infty_{[p]}$ је јединствена права из Плејферове аксиоме за коју је $A \in q \parallel p$, те за њу имамо $\vec{q} \propto \vec{A} \times \overrightarrow{\infty_{[p]}} \propto (9, 6, -7)$. Дакле, права кроз A паралелна са p има хомогене координате $q = [9 : 6 : -7]$, односно дата је једначином $9x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 0$. $\triangle$

2.5 Координатизација пројективне равни *

По Теореме 2.4 аналитичка раван $\mathbb{P}^2$ је једна пројективна раван за свако поље $\mathbb{F}$. Природно се поставља питање обрата овог тврђења. Да ли је свака пројективна раван аналитичка? Може ли се свака пројективна раван координатизовати?

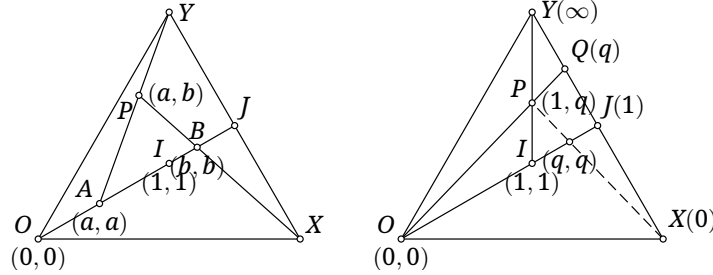
У циљу да опишемо конкретне пројективне равни и евентуално одредимо кад су неке две пројективне равни изоморфне можемо се послужити координатизацијом. Користимо скуп симбола $\mathbb{K}$ који је исте кардиналности као скуп свих тачака сем једне које су инцидентне некој правој, тако да постављамо $0, 1 \in \mathbb{K}$ уз $0 \neq 1$. За опис искључене тачке често користимо апстрактни елемент ∞ који не припада $\mathbb{K}$.

Полазимо од четворотеменика $OXYI$ чију егзистенцију у пројективној равни гарантује Аксиома 2.3. Основна идеја је имитација хомогених координата у равни $\mathbb{P}^2$ тако да темена уоченог четворотеменика буду базне тачке: $O(0 : 0 : 1)$, $X(0 : 1 : 0)$, $Y(1 : 0 : 0)$, $I(1 : 1 : 1)$. Праву $X \vee Y$ третирамо као бесконачну, а ради лакших ознака користимо дехомогенизовану варијанту координата $(x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_1/x_3, x_2/x_3)$ за $x_3 \neq 0$, односно $(x_1 : x_2 : 0) \mapsto (x_1/x_2)$ за $x_2 \neq 0$.

Уведимо тачку $J = (O \vee I) \wedge (X \vee Y)$ и нека је τ бијекција која повезује тачке инцидентне правој $O \vee I$, без тачке J (коју третирамо као бесконачну), са елементима скупа $\mathbb{K}$, тако да је $\tau(O) = 0$ и $\tau(I) = 1$. Скуп $\mathbb{K}$ омогућава да се координате уведу у целокупној равни.

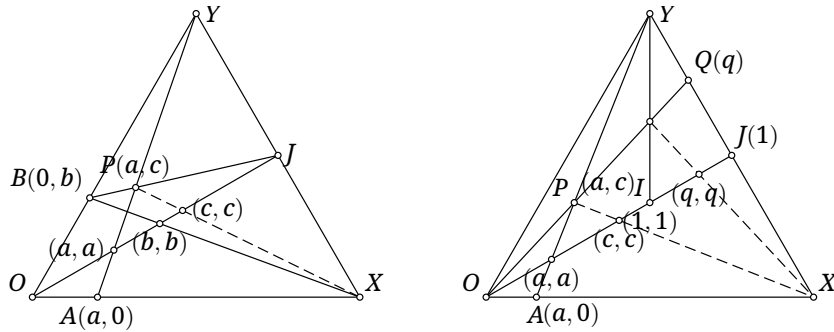
Најпре координатизујемо саму праву $O \vee I$ тако што тачкама $P \neq J$ додељујемо координате $(\tau(P), \tau(P))$. Права $X \vee Y$ представља бесконачну праву, тако да тачке P ван ње чине афину раван, те уколико је $A = (P \vee Y) \wedge (O \vee I)$ и $B = (P \vee X) \wedge (O \vee I)$, тачки P додељујемо координате $(\tau(A), \tau(B))$, што уопштава претходну координатизацију. На овај начин свакој „коначној“ тачки доделили смо две афине координате, односно

уређен пар из $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Бесконачним тачкама Q са праве $X \vee Y$ додељујемо само једну координату (q) из $\mathbb{K}$, уколико смо по претходном тачки $P = (Q \vee O) \wedge (Y \vee I)$ доделили координате $(1, q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Преостаје бесконачна тачка Y којој додељујемо (∞) и тиме комплетирамо координатизацију пројективне равни у којој различите тачке добијају различите координате.



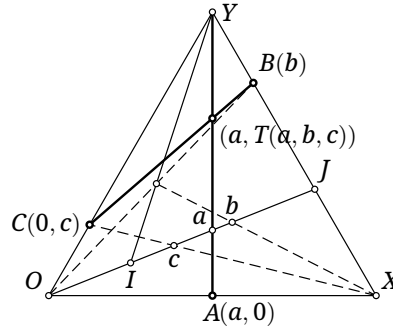
Координатизацију правих уводимо тако да складно прати већ уведене координате тачака. Ако права p није инцидентна са Y онда имамо $p \wedge (X \vee Y) = (a)$ и $p \wedge (O \vee Y) = (0, b)$, те правој p додељујемо координате $[a, b]$. У супротном је права p инцидентна са Y , те правој $X \vee Y$ додељујемо $[\infty]$, док иначе имамо $p \wedge (O \vee X) = (a, 0)$ и правој p додељујемо $[a]$.

Основна идеја је да геометријске особине преведемо у алгебарске, а онда да приметимо што више алгебарских структура на скупу $\mathbb{K}$. Особине пројективне равни омогућавају да на скупу $\mathbb{K}$ уведемо операцију сабирања на следећи начин. За тачке $A(a, 0)$ и $B(0, b)$, тачка $P = (A \vee Y) \wedge (B \vee J)$ ће имати координате облика (a, c) , при чему дефинишемо $a + b = c$. Пажљивим изучавањем ове дефиниције сабирања можемо приметити да је $0 \in \mathbb{K}$ неутрал за сабирање, као и да сваки елемент из $\mathbb{K}$ поседује и леви и десни инверз за сабирање, што ћемо доказати касније у Лемми 2.8.



На скупу $\mathbb{K}$ уводимо и операцију множења тако што за тачке $A(a, 0)$ и $Q(q)$, тачка $P = (A \vee Y) \wedge (O \vee Q)$ има координате облика (a, c) , при чему дефинишемо $a \cdot q = c$. Сасвим слично претходном, пажљивим посматрањем можемо приметити да се множење нулом и множење јединицом понаша на уобичајени начин, као и да сваки елемент из $\mathbb{K}$, сем нуле, поседује и леви и десни инверз за множење.

У аналитичкој равни $\mathbb{FP}^2$, све праве се могу описати као скупови тачака које задовољавају линеарну једначину $y = x \cdot q + c$. Нажалост, сабирање и множење које смо дефинисали не мора нужно да опише све праве на такав начин. Због тога скуп тачака праве описујемо тернарном операцијом $T: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ коју уводимо на следећи начин. За тачке $A(a, 0)$, $C(0, c)$ и $B(b)$ уводимо тачку $(A \vee Y) \wedge (C \vee B)$ која има координате (a, d) , при чему дефинишемо $T(a, b, c) = d$.



Приметимо да за $c = 0$ имамо $C = O$, те је $T(a, b, 0) = a \cdot b$, док за $b = 1$ имамо $B = J$, те је $T(a, 1, c) = a + c$. Зато уведено сабирање и множење представљају специјалне случајеве тернарне операције T . Директно из дефиниције следи да је тачка (x, y) инцидентна са спојницом $[b, c]$ тачака $(0, c)$ и (b) ако и само ако је $y = T(x, b, c)$, тако да важи

$$T(a, b, c) = d \Leftrightarrow (a, d) \mathcal{I} [b, c].$$

Овако геометријске особине претварамо у алгебарске. Испитајмо $T(a, b, c)$ за неке посебне $a, b, c \in \mathbb{K}$. Из $[1] \wedge [b, 0] = (1, b)$ следи $T(1, b, 0) = b$. Из $[a] \wedge [1, 0] = (a, a)$ следи $T(a, 1, 0) = a$. Из $[0] \wedge [b, c] = (0, c)$ следи $T(0, b, c) = c$. Из $[a] \wedge [0, c] = (a, c)$ је $T(a, 0, c) = c$.

Јединствена сецишта и спојнице (које нам омогућавају Аксиоме 2.1 и 2.2) дају додатне алгебарске особине за $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Из $((a, d) \vee (b)) \wedge [0] = (0, y)$ имамо јединствено y такво да је $T(a, b, y) = d$. За $a \neq c$ из $[a, b] \wedge [c, d] = (x, y)$ имамо јединствено x за које је $T(x, a, b) = T(x, c, d)$. Коначно, за $a \neq c$ имамо $((a, b) \vee (c, d)) \wedge [0] = (0, y)$ и $((a, b) \vee (c, d)) \wedge [\infty] = (x)$, што даје јединствено (x, y) такво да је и $T(a, x, y) = b$ и $T(c, x, y) = d$. Претходни резултати нас мотивишу да уведемо појам (раванског) тернарног прстена.

Тернарни њрстѐн $(\mathbb{K}, T)$ чини скуп $\mathbb{K} \ni \{0, 1\}$ са тернарном операцијом $T: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$ која задовољава следеће особине:

$$(\forall a \in \mathbb{K}) T(1, a, 0) = T(a, 1, 0) = a; \quad (2.1)$$

$$(\forall a, c \in \mathbb{K}) T(0, a, c) = T(a, 0, c) = c; \quad (2.2)$$

$$(\forall a, b, d \in \mathbb{K}) (\exists! y \in \mathbb{K}) T(a, b, y) = d; \quad (2.3)$$

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{K}) (a \neq c) \Rightarrow (\exists! x \in \mathbb{K}) T(x, a, b) = T(x, c, d); \quad (2.4)$$

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{K}) (a \neq c) \Rightarrow (\exists! (x, y) \in \mathbb{K}^2) (T(a, x, y) = b) \wedge (T(c, x, y) = d). \quad (2.5)$$

Претходна дискусија показује да сваки четворотеменик $OXYI$ у пројективној равни преко координата генерише тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$, што можемо формулисати као теорему.

Теорема 2.6. Нека је пројективна равна координатизована скупом $\mathbb{K}$. Ако је T дефинисано са $T(a, b, c) = d \Leftrightarrow (a, d) \mathcal{I} [b, c]$ онда је $(\mathbb{K}, T)$ тернарни њрстѐн.

Међутим, важи и обрат овог тврђења, што нам омогућава да из тернарног прстена конструишемо конкретну пројективну равна.

Теорема 2.7. Сваки тернарни њрстѐн $(\mathbb{K}, T)$ генерише пројективну равна $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ на

следећи начин.

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \bigcup_{a,b \in \mathbb{K}} (a, b) \cup \bigcup_{a \in \mathbb{K}} (a) \cup (\infty) \\ \mathcal{P} &= \bigcup_{a,b \in \mathbb{K}} [a, b] \cup \bigcup_{a \in \mathbb{K}} [a] \cup [\infty] \\ \mathcal{I} &= \bigcup_{a,b,c \in \mathbb{K}} ((a, T(a, b, c)), [b, c]) \cup \bigcup_{a,b \in \mathbb{K}} ((a, b), [a]) \cup \bigcup_{a,b \in \mathbb{K}} ((a), [a, b]) \\ &\quad \cup \bigcup_{a \in \mathbb{K}} ((a), [\infty]) \cup \bigcup_{a \in \mathbb{K}} ((\infty), [a]) \cup \bigcup_{a \in \mathbb{K}} ((\infty), [\infty])\end{aligned}$$

Доказ. Потребно је проверити да овако дефинисно $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ испуњава аксиоме пројективне равни. Аксиому 2.1 проверавамо дискусијом по различитим типовима тачака. Ако су тачке (a, b) и (c, d) са $a \neq c$, по (2.5) постоји јединствено $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ тако да је $T(a, x, y) = b$ и $T(c, x, y) = d$, што је еквивалентно са $(a, b)\mathcal{I}[x, y]$ и $(c, d)\mathcal{I}[x, y]$, односно $[x, y]$ је њихова јединствена спојница. Тачке (a, b) и (a, d) су очигледно инцидентне са $[a]$, а евентуална додатна инциденција са $[x, y]$ значила би $b = T(a, x, y) = d$ што је немогуће за различите тачке. Свака права инцидентна са (c) је или $[\infty]$ или облика $[c, d]$ за неко $d \in \mathbb{K}$, тако да заједничка права инцидентна са (a, b) мора бити $[c, d]$ где је d јединствено решење једначине $T(a, c, d) = b$ из (2.3). Како свака права различита од $[\infty]$ која је инцидентна са (∞) има облик $[c]$ за неко $c \in \mathbb{K}$, то је јединствена спојница за (a, b) и (∞) права $[a]$, а за (a) и (∞) права $[\infty]$. Коначно, тачке (a) и (b) очигледно имају јединствену спојницу $[\infty]$.

Слично вршимо проверу Аксиоме 2.2, при чему је довољно анализирати само егзистенцију, јер ће јединственост сецишта донети Аксиома 2.1. Ако су праве $[a, b]$ и $[c, d]$ са $a \neq c$, по (2.4) постоји јединствено $x \in \mathbb{K}$ тако да је $T(x, a, b) = T(x, c, d)$ одакле имамо јединствено сециште $(x, T(x, a, b)) = (x, T(x, c, d))$. Праве $[a, b]$ и $[a, d]$ су инцидентне са (a) . Тачка (x, y) инцидентна са $[a, b]$ и $[c]$ мора да испуни $T(x, a, b) = y$ и $x = c$, те је у питању јединствено сециште $(c, T(c, a, b))$. Праве $[a, b]$ и $[\infty]$ инцидентне су са (a) , док су праве $[a]$ и $[\infty]$, односно $[a]$ и $[b]$, инцидентне са (∞) .

Тачке $(0, 0)$, $(0), (\infty)$, $(1, 1)$ очигледно чине четворотеменик, што проверава Аксиому 2.3 и комплетира доказ. $\square$

У тернарном прстену бинарне операције сабирања и множења не морају бити унапред дефинисане, али их зато можемо накнадно увести са $a + b = T(a, 1, b)$ и $a \cdot b = T(a, b, 0)$. Под **квазигрупом** $(S, *)$ подразумевамо непразан скуп S са бинарном операцијом $*$ тако да за $a, b \in S$ једначина $a * x = b$ има јединствено решење $x \in S$ и једначина $y * a = b$ има јединствено решење $y \in S$. Квазигрупу која има неутрал (елемент $e \in S$ са особиним $e * x = x * e = x$ за свако $x \in S$) зовемо **группом**. Може се показати да услови дефиниције повлаче да $(\mathbb{K}, +)$ и $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ имају структуру петље.

Лема 2.8. Ако је $(\mathbb{K}, T)$ тернарни прстен тада су $(\mathbb{K}, +)$ и $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ групе.

Доказ. За свако $a \in \mathbb{K}$ из (2.1) имамо $0 + a = T(0, 1, a) = a$ и $a + 0 = T(a, 1, 0) = a$, што значи да је 0 неутрал за сабирање. По (2.3) (користећи (2.1)) имамо јединствено решење x једначине $T(a, 1, x) = a + x = b$. По (2.4) (користећи (2.1) и (2.2)) имамо јединствено решење x једначине $T(x, 1, a) = x + a = b = T(x, 0, b)$. Овим смо доказали да је $(\mathbb{K}, +)$ петља са неутралом 0.

Што се множења тиче, морамо најпре показати затвореност операције $\cdot$ у $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ако бисмо имали $x \neq 0, y \neq 0$ и $T(x, y, 0) = x \cdot y = 0 = T(x, 0, 0)$, по (2.4) (јер $y \neq 0$) имамо јединствено решење за x , што је контрадикторно са тим да $x = 0$ јесте очигледно решење. За свако $a \in \mathbb{K}$ из (2.1) имамо $1 \cdot a = T(1, a, 0) = a$ и $a \cdot 1 = T(a, 1, 0) = a$, што значи да је 1 неутрал за множење. Из (2.5) за $a \neq 0$ једначине $T(a, x, y) = b$ и

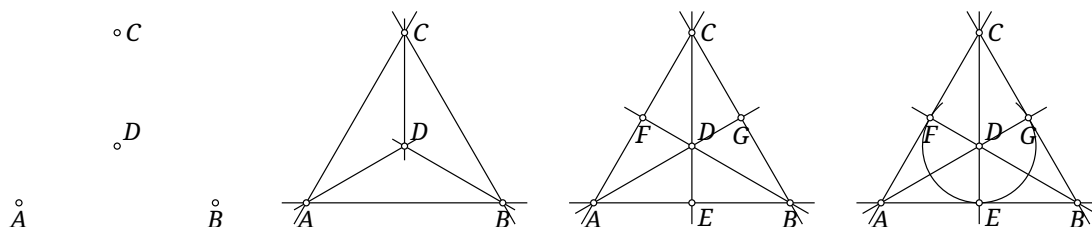
$T(0, x, y) = y = 0$ имају јединствено заједничко решење $(x, y) = (x, 0)$ и зато постоји јединствено решење x за $T(a, x, 0) = a \cdot x = b$. По (2.4) за $a \neq 0$ имамо јединствено решење x једначине $T(x, a, 0) = x \cdot a = b = T(x, 0, b)$. Овим смо доказали да је $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ петља са неутралом 1. $\square$

Претходна лема даје неке особине структуре $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ која је изведена из тернарног прстена $(\mathbb{K}, T)$, али напоменимо да у општем случају он није прстен у традиционалном алгебарском смислу. Не можемо много тога рећи о алгебри у тернарном прстену. Међутим, када наметнемо одређене геометријске услове за пројективну раван, ствари се мењају на боље и добијамо лепе алгебарске услове за тернарни прстен. Све се чини много лепше у случају да додатно важи $T(a, b, c) = a \cdot b + c$, а за такав тернарни прстен кажемо да је **линеаран**.

Историјски, тернарни прстен је 1943. године открио Хал⁵¹ [36]. Међутим, дефиниција коју смо изложили није оригинална Халова, већ модификација која се временом усталила као стандардна. Модификације су могуће и у самој координатизацији, те иако ми користимо Халов метод, постоје и друге методе, на пример незнатну разлику има Пикерт⁵² [62], док је метод који су изложили Хјуз и Пајпер [42] другачији.

2.6 Коначна пројективна раван

Концепт пројективне равни заснован на уведене три аксиоме инциденције је прилично општи. Интуитивни модел $\mathbb{P}^2$ је само једна од могућности, док је питање комплетне класификације свих могућих пројективних равни прилично далеко од људског разумевања. Пројективна раван не мора да има бесконачан број елемената, а природно се поставља питање како изгледа најмања могућа пројективна раван, односно она која има најмање тачака.



Аксиома 2.3 гарантује егзистенцију тачака A, B, C, D , међу којима нема три колинеарне. Оне су различите јер иначе две исте са произвољном трећом јесу колинеарне. По Аксиоми 2.1 сваки пар тих тачака одређује јединствену спојницу, што генерише укупно шест различитих правих. Аксиома 2.2 захтева да сваки пар различитих правих има јединствено сециште. Постоје тачно три сецишта која недостају и то су $E = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$, $F = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$ и $G = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$, што гарантује нове три тачке E, F и G . Поновна примена Аксиоме 2.1 захтева постојање нових правих $E \vee F$, $E \vee G$ и $F \vee G$ које се разликују од почетних шест, али могу бити исте међусобно. Како свакако имамо бар једну нову праву, број правих не може бити мањи од седам, као ни број тачака. Најједноставније је поставити E, F и G тако да буду колинеарне, чиме се комплетира пројективна раван. Оваква конструкција има седам тачака и седам правих, а једноставно се проверава да испуњава све три аксиоме. Тако конструисану минималну пројективну раван називамо **Фаноова раван**.

Фаноова раван је име добила по „оцу коначне геометрије“ који је у свом раду [29] први конструисао коначни тродимензиони пројективни простор са 15 тачака, 35

⁵¹Marshall Hall (1910–1990), амерички математичар

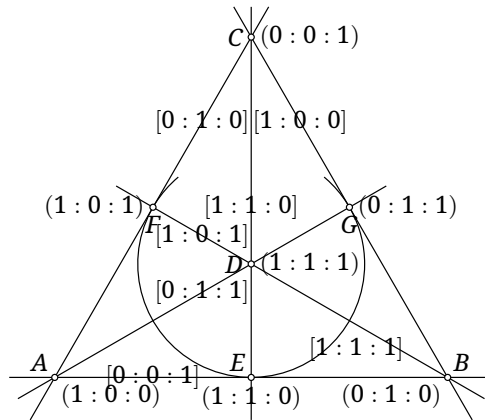
⁵²Günter Pickert (1917–2015), немачки математичар

правих и 15 равни, тако да свака права садржи тачно три тачке, док су све равни заправо Фаноове равни са седам тачака.

Коначна пројективна равна је пројективна равна $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ за коју су скупови $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$ коначни. Најлакше је добијати као специјални случај аналитичке пројективне равни $\mathbb{F}\mathbf{P}^2$ кад поље $\mathbb{F}$ заменимо неким коначним пољем. Најједноставнији примери коначних поља су проста поља (минимална потпоља која садрже јединицу). За сваки прост број p имамо скуп целих бројева по модулу p ,

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z} / p\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, p-1\},$$

где сваки елемент $a \neq 0$ захваљујући малој Фермаовој теореми има мултипликативни инверз a^{p-2} , те је $\mathbb{Z}_p$ поље. Минимално поље $\mathbb{Z}_2$ има само два елемента (0 и 1), а њему одговара аналитичка пројективна равна $\mathbb{Z}_2\mathbf{P}^2$.



Ако пажљиво нацртамо слику, лако можемо препознати да је $\mathbb{Z}_2\mathbf{P}^2$ управо претходно дефинисана Фаноова равна. Свака права Фаноове равни садржи тачно три тачке, а можемо показати да је то минималан број тачака на правој у свакој пројективној равни.

Лема 2.9. Свака права пројективне равни инцидентна је са бар три тачке.

Доказ. Нека је $p \in \mathcal{P}$ произвољна права која је инцидентна са највише две тачке. Аксиома 2.3 утврђује постојање четири тачке међу којима нема три колинеарне. Нека је A тачка која није инцидентна са p (постоје бар две такве тачке), а нека су B , C и D преостале. Праве $A \vee B$, $A \vee C$ и $A \vee D$ инцидентне су са A , међусобно су различите и различите од p . Због тога су сецисишта $p \wedge (A \vee B)$, $p \wedge (A \vee C)$ и $p \wedge (A \vee D)$ три различите тачке инцидентне са правом p , што је контрадикција. $\square$

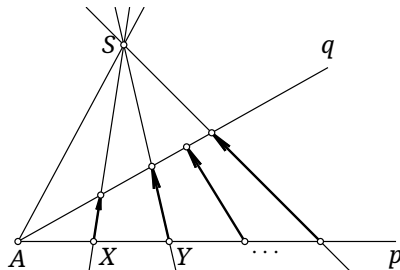
Принцип дуалности из Теореме 2.2 омогућава да без доказа поставимо нову теорему која је дуална некој већ доказаној теореми. Директна примена на Лему 2.9 доноси нам њен дуал.

Лема 2.10. Свака тачка пројективне равни инцидентна је са бар три праве.

У Фаноовој равни, свака права инцидентна је са тачно три тачке, а свака тачка инцидентна је са тачно три праве. Појављивање истих бројева није случајно, о чему говори наредна лема.

Лема 2.11. За коначну пројективну равна постоји константа k , таква да је свака права инцидентна са тачно k тачака, док је свака тачка инцидентна са тачно k правих.

Доказ. Нека је p права која је инцидентна са тачно k тачака. Нека је $q \neq p$ произвољна права и $A = p \wedge q$. По Леми 2.10 постоји права $r \nparallel A$ различита од p и q , док по Леми 2.9 постоји тачка $S \nparallel r$ различита од A . Свака тачка X инцидентна са p генерише тачку $(X \vee S) \wedge q$ инцидентну са правом q . Ако за неке тачке X и Y инцидентне са p важи $(X \vee S) \wedge q = (Y \vee S) \wedge q$, било би $X \vee S = Y \vee S (= ((X \vee S) \wedge q) \vee S)$ и одатле $X = Y$. Различите тачке са p генеришу различите тачке са q , као и обратно, те је и права q инцидентна са тачно k тачака.



Нека је S произвољна тачка. Како све праве нису конкурентне (јер дуално, све тачке по Аксиоми 2.3 нису колинеарне), то постоји права p која није инцидентна са S . Свака тачка X инцидентна са p генерише праву $X \vee S$, али и обратно, јер свака права инцидентна са S мора да има сециште са p . Одавде следи да ако је p инцидентна са тачно k тачака, то је S инцидентна са тачно k правих. $\square$

Претходна лема помаже да лако израчунамо број елемената коначних скупова $\mathcal{T}$ и $\mathcal{P}$. **Ред коначне пројективне равни** је број за један мањи од броја тачака инцидентних са сваком правом, односно то је број $r = k - 1$ где је k број из Леме 2.11. Ако је r ред коначне пројективне равни, онда је број тачака на свакој правој $r + 1$, што је и број правих кроз сваку тачку. Свака од $r + 1$ правих које пролазе кроз произвољну тачку садржи додатних r тачака. Све ове тачке су различите, иначе би неке од тих правих поред почетне тачке имале још једно сециште, тако да укупан број тачака износи $(r + 1)r + 1$, односно $r^2 + r + 1$.

Лема 2.12. Коначна пројективна равна реда r садржи $r^2 + r + 1$ тачака и $r^2 + r + 1$ правих.

Размотримо поново коначна поља или Галоаова⁵³ поља како се још називају. Број елемената коначног поља зовемо **ред поља**, а $\mathbb{Z}_p$ за просто p је пример поља реда p . Нека је $\mathbb{F}_r$ коначно поље реда r , а $\mathbb{F}_r \mathbf{P}^2$ одговарајућа аналитичка пројективна равна из Теореме 2.4. Број тачака те равни износи $(r^3 - 1)/(r - 1) = r^2 + r + 1$, што се може оправдати тиме да има r^2 класа еквиваленције са векторима представницима $(x, y, 1)$ за произвољно $x, y \in \mathbb{F}_r$, затим r класа са представницима $(x, 1, 0)$ за произвољно $x \in \mathbb{F}_r$, као и једну класу са представником $(1, 0, 0)$. Дакле, ред аналитичке пројективне равни једнак је реду коначног поља од којег равна потиче.

Коначно поље реда r постоји ако и само ако му је ред степен простог броја, односно ако је $r = p^k$ за прост број p и природан број k . Додатно, сва коначна поља датог реда су међусобно изоморфна, тако да се за поље реда $r = p^k$ могу користити недвосмислене ознаке $\mathbb{F}_r$ или $GF(r)$. За сваки степен простог броја $r = p^k$ постоји $f(x)$, иредуцибилни полином степена k , при чему поље реда r добијамо сечењем прстена $\mathbb{Z}_p[x]$ свих полинома над $\mathbb{Z}_p$ по идеалу генерисаним са $f(x)$, односно $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_p[x]/f(x)$ је поље реда p^k .

На природно питање који су могући редови за коначне пројективне равни прилично је тешко дати прецизан одговор. Оно што за сада знамо је да ред коначне пројективне равни може бити сваки степен простог броја $r = p^k$. Како постоји коначно

⁵³Évariste Galois (1811–1832), француски математичар

поље реда r , аналитичка раван која му одговара је такође реда r . Међутим, иако не постоји коначно поље реда које није степен простог броја то не мора да значи да не постоји коначна пројективна раван тог реда, јер постоје пројективне равни које нису индуковане пољем, односно нису све пројективне равни аналитичке. Са друге стране, до сада није позната ниједна пројективна раван која за ред нема степен простог броја, што је разлог да се верује да су то једини дозвољени редови.

2.7 Латински квадрати *

Коначне пројективне равни могу се повезати са латинским квадратима, а за детаљну анализу латинских квадрата позивамо читаоца да прочита неке књиге из комбинаторике попут оне које су написали ван Линт⁵⁴ и Вилсон⁵⁵ [48].

Под **квадраном** реда n , подразумевамо пресликавање $L: V \times K \rightarrow S$, односно уређену четворку $(V, K, S; L)$, где су V , K и S коначни скупови од n елемената. Елементи скупа V су **врсџе**, елементи скупа K су **колоне**, а елементи скупа S су **симболи** квадрата. Кажемо да је квадрат **латински** уколико једначина $L(i, j) = x$ има јединствено решење $j \in K$ за свако $i \in V$, $x \in S$, као и јединствено решење $i \in V$ за свако $j \in K$, $x \in S$.

Појам латинског квадрата потиче од Ојлера⁵⁶ који је за симболе из скупа S користио латинска слова, те отуда и име. Латински квадрат се уобичајено записује као квадратна матрица чији улаз у врсти i и колони j одговара симболу $L(i, j)$, при чему има особину да се сваки симбол појављује тачно једном у свакој врсти и свакој колони.

A	B	C	D	E
B	D	A	E	C
C	E	D	B	A
D	A	E	C	B
E	C	B	A	D

Пример латинског квадрата реда пет видимо на горњој слици, а популарни примери су класичне судоку загонетке које су латински квадрати реда девет. Често се сви скупови поистовете, са $V = K = S = S_n = \{1, 2, \dots, n\}$, при чему латински квадрат постаје квазигрупа S_n са бинарном операцијом $\circ$, где је $x \circ y = L(x, y)$. Посебно, латинске квадрате можемо добити као табелу неке групе.

За два квадрата $L_1: V \times K \rightarrow S$ и $L_2: V \times K \rightarrow T$ са истим скуповима врста и колоне, кажемо да су **ортојонална** уколико за сваки уређен пар $(s, t) \in S \times T$ постоји јединствено $(x, y) \in V \times K$ тако да је $L_1(x, y) = s$ и $L_2(x, y) = t$. Ортогоналност два квадрата може се представити једначином $S \times T = \{(L_1(x, y), L_2(x, y)) : (x, y) \in V \times K\}$, али је то најбоље илустровати на примеру. Посматрајмо два латинска квадрата реда четири и преклопимо их један преко другог, на следећи начин.

A	K	Q	J	+	♠	♥	♦	♣	→	A♠	K♥	Q♦	J♣
K	A	J	Q		♦	♣	♠	♥		K♦	A♣	J♠	Q♥
Q	J	A	K		♣	♦	♥	♠		Q♣	J♦	A♥	K♠
J	Q	K	A		♥	♠	♣	♦		J♥	Q♠	K♣	A♦

Нови квадрат добијен суперпозицијом има све различите симболе, односно уређене парове оригиналних симбола, што значи да су почетна два латинска квадрата

⁵⁴Jacobus Hendricus van Lint (1932–2004), холандски математичар

⁵⁵Richard Michael Wilson (1945), амерички математичар

⁵⁶Leonhard Euler (1707–1783), швајцарски математичар и физичар

ортогонална. Квадрат добијен суперпозицијом два ортогонална латинска квадрата зовемо **грчко-латински квадрат**, а термин такође потиче од Ојлера који је за симболе из S користио латинска, док је за симболе из T користио грчка слова. Ојлер је оригинално објавио два рада на тему грчко-латинских квадрата. У свом кратком раду из 1776. године [26] он је посматрао магичне квадрате који су у блиској вези са грчко-латинским квадратима, док је у другом, прилично опширном раду из 1779. године [27], изучавао егзистенцију грчко-латинских квадрата.

Поставља се природно питање о томе колико латинских квадрата конкретног реда можемо направити тако да су свака два међусобно ортогонална. На пример, за ред $n = 4$ можемо поћи од латинског квадрата који формира Клајнова група $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а онда пермутацијама врсти добити још два латинска квадрата.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3
3	4	1	2

Једноставном провером видимо да смо на овај начин добили три међусобно ортогонална латинска квадрата реда 4, а испоставља се да је то теоријски максимум.

Лема 2.13. *Не постоји више од $n - 1$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда n .*

Доказ. Нека су $L_1, \dots, L_n$ међусобно ортогонални латински квадрати реда n . Како су квадрати латински то за свако $i \in S_n$ постоји $s_i \in S_n$ тако да важи $L_i(1, s_i) = L_i(2, 1)$ (разноликост прве врсте), при чему је $s_i \neq 1$ (разноликост прве колоне). У случају да је $s_i = s_j = s$ било би $(L_i(2, 1), L_j(2, 1)) = (L_i(1, s_i), L_j(1, s_j))$, те због $(2, 1) \neq (1, s)$, квадрати L_i и L_j нису ортогонални. Дакле, за $i \neq j$ важи $s_i \neq s_j$, при чему је $s_i \neq 1$, што противречи Дирихлеовом⁵⁷ принципу. $\square$

Теоретски максимум се достиже у случају коначног поља $\mathbb{F}$ реда n , где за свако $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ можемо конструисати $L_a(x, y) = ax + y$. Овако направљени квадрати $(n - 1)$ њих) су латински јер тада имамо $L_a(x_1, y) = ax_1 + y \neq ax_2 + y = L_a(x_2, y)$ за $x_1 \neq x_2$, као и $L_a(x, y_1) = ax + y_1 \neq ax + y_2 = L_a(x, y_2)$ за $y_1 \neq y_2$. Додатно, уколико претпоставимо $(L_{a_1}(x_1, y_1), L_{a_2}(x_1, y_1)) = (L_{a_1}(x_2, y_2), L_{a_2}(x_2, y_2))$, то добијамо $a_1(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0$ и $a_2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0$, те отуда $(a_1 - a_2)(x_1 - x_2) = 0$, што даје $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Тако је $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, што значи да су наши квадрати међусобно ортогонални.

За систем од $n - 1$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда n кажемо да је **комплетан**, док њиховом суперпозицијом добијамо квадрат који зовемо **хијер-грчко-латински квадрат**. Међутим, креирање међусобно ортогоналних латинских квадрата не може ићи произвољно. На пример, за латински квадрат

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

не постоји њему ортогоналан латински квадрат.

Некада је погоднио увести два нова квадрата реда n са $L_+(x, y) = x$ и $L_-(x, y) = y$, што су у случају реда $n = 4$ наредни квадрати.

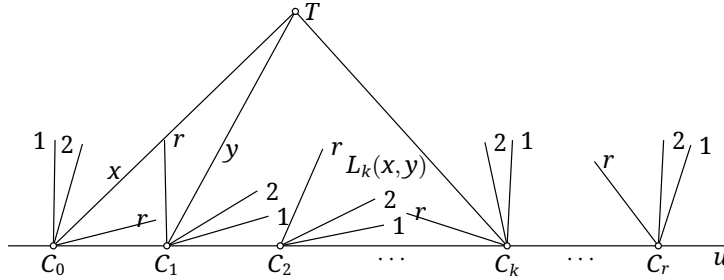
1	1	1	1
2	2	2	3
3	3	3	3
4	4	4	4

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

⁵⁷Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), немачки математичар

Ови додатни квадрати нам омогућавају да проверавамо само ортогоналност јер оригинални квадрати су латински ако и само ако су ортогонални и на L_+ и на L_- .

Латинске квадрате можемо геометријски повезати са коначним пројективним равнима на следећи начин. Нека је $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ коначна пројективна равна реда r . Нека је $u \in \mathcal{P}$ произвољна права, а $C_0, C_1, \dots, C_r$ све тачке инцидентне са њом. Постоји r правих инцидентних са C_i различитих од u , и нумеришемо их са $p(i, 1), p(i, 2), \dots, p(i, r)$, тако да је $f_i(p(i, j)) = j$. За произвољну тачку $T \notin u$ посматрамо са њом инцидентне праве: $T \vee C_0, T \vee C_1, \dots, T \vee C_r$, те нека је $f_0(T \vee C_0) = x$ и $f_1(T \vee C_1) = y$. За свако $k \in \{2, 3, \dots, r\}$ постављамо $L_k(x, y) = f_k(T \vee C_k)$ и посматрамо особине овако дефинисаног пресликавања $L_k: S_r \times S_r \rightarrow S_r$.



Ако је $L_k(x_1, y) = L_k(x_2, y)$, тада су тачке $p(0, x_1) \wedge p(1, y)$ и $p(0, x_2) \wedge p(1, y)$ инцидентне са правом $p(k, L_k(x_1, y)) = p(k, L_k(x_2, y))$, као и са правом $p(1, y)$, тако да по Аксиоми 2.2 имамо $x_1 = x_2$. Сасвим слично, ако је $L_k(x, y_1) = L_k(x, y_2)$, тада су тачке $p(0, x) \wedge p(1, y_1)$ и $p(0, x) \wedge p(1, y_2)$ инцидентне са правом $p(k, L_k(x, y_1)) = p(k, L_k(x, y_2))$, као и са правом $p(0, x)$, одакле имамо $y_1 = y_2$. Због тога је L_k латински квадрат.

Ако је $(L_j(x_1, y_1), L_k(x_1, y_1)) = (L_j(x_2, y_2), L_k(x_2, y_2))$, тада су и тачка $p(0, x_1) \wedge p(1, y_1)$ и тачка $p(0, x_2) \wedge p(1, y_2)$ инцидентне са правом $p(j, L_j(x_1, y_1)) = p(j, L_j(x_2, y_2))$, као и са правом $p(j, L_k(x_1, y_1)) = p(j, L_k(x_2, y_2))$, али како је $u = C_j \vee C_k$, то мора бити $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$. Овим смо доказали да су L_j и L_k међусобно ортогонални латински квадрати за различите $j, k \in \{2, 3, \dots, r\}$.

Дакле, егзистенција коначне пројективне равни реда r повлачи егзистенцију $r-1$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r . Овај резултат нас наводи да повежемо латинске квадрате са координатизацијом, односно тернарним прстеном. Наредна лема мало упрошћава дефиницију тернарног прстена у случају коначне пројективне равни.

Лема 2.14. Услов (2.5) дефиниције тернарног прстена $(\mathbb{K}, T)$ је сувишан за коначно $\mathbb{K}$.

Доказ. Услов (2.5) из дефиниције каже да за $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ са $a \neq c$ постоји јединствено $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ тако да је $T(a, x, y) = b$ и $T(c, x, y) = d$. Уколико $(x, y) \mapsto (b, d)$ није бијекција на $\mathbb{K}^2$ имали бисмо $T(a, x, y) = T(a, x', y')$ и $T(c, x, y) = T(c, x', y')$ за неке $(x, y) \neq (x', y')$ што за $x = x'$ противречи услову (2.3), а за $x \neq x'$ противречи услову (2.4). $\square$

Користећи везу између ортогоналних латинских квадрата и тернарног прстена у могућности смо да докажемо теорему коју је 1938. поставио Боус⁵⁸ у [8].

Теорема 2.15 (Боус). Пројективна равна реда r постоји ако и само ако постоји комутативан систем међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r .

Доказ. Ако постоји тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$ за $\mathbb{K} = \{0, 1, \dots, r-1\}$, можемо конструирати ортогоналне латинске квадрате са $L_k(i, j) = T(k, i, j)$ за $k \neq 0$. За $T(k, i, x) = T(k, i, y)$ по (2.3) следи $x = y$ одакле су симболи у колонама различити. Из (2.2) следи да је $k = 0$ решење једначине $T(k, x, j) = T(k, y, j)$, те друго решење због (2.4) повлачи $x = y$,

⁵⁸Raj Chandra Bose (1901–1987), индијски математичар

одакле су симболи у врстама различити, те су сви конструисани квадрати латински. Ако $T(x, a, b) = T(x, c, d)$ има два решења онда из (2.5) следи $a = c$, а затим из (2.3) добијамо и $b = d$, односно $(a, b) = (c, d)$, те су наши квадрати ортогонални. Дакле, ако постоји пројективна раван реда r , по Теорему 2.6 постоји тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$ реда r , и одатле комплетан систем међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r . Напоменимо да је ово само другачији доказ тврђења које смо претходно показали геометријски.

Размотримо обрат. Претпоставимо да имамо комплетан систем међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r . Пермутација симбола у латинском квадрату оставиће квадрат латинским, а очигледно не утиче ни на ортогоналност, тако да можемо користити такозвану **нормалну форму** у којој сви квадрати имају идентичну прву врсту коју чине редом бројеви $0, 1, \dots, r-1$. Пермутација врсти, истовремено на свим квадратима, такође не утиче на ортогоналност, тако да их можемо дотерати да први од њих има прву колону коју такође чине редом бројеви $0, 1, \dots, r-1$. Остале квадрате можемо нумерисати тако да им је редни број једнак елементу на позицији $(1, 0)$. Дакле, почетни услов је еквивалентан егзистенцији комплетног система $L_1, L_2, \dots, L_{r-1}: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ међусобно ортогоналних латинских квадрата реда r , где је $\mathbb{K} = \{0, 1, 2, \dots, r-1\}$, при чему је $L_a(0, j) = j$, $L_1(j, 0) = j$ и $L_a(1, 0) = a$ за свако $j \in \mathbb{K}$ и $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Докажимо да тернарни прстен лако добијамо са $T(a, b, c) = L_a(b, c)$ за $a \neq 0$ уз неопходно $T(0, b, c) = c$. Услови (2.1) и (2.2) очигледно важе директном провером. Услов (2.3) важи јер како је L_a латински то једначина $T(a, b, y) = L_a(b, y) = d$ има јединствено решење у. Услов (2.4) важи јер ортогоналност квадрата гарантује да једначина $L_x(a, b) = T(x, a, b) = T(x, c, d) = L_x(c, d)$ има јединствено решење x . Како је $\mathbb{K}$ коначан скуп, (2.5) не морамо проверавати због Леме 2.14, те је $(\mathbb{K}, T)$ заиста тернарни прстен. Коначно, по Теорему 2.7, тернарни прстен генерише пројективну раван истог реда. $\square$

Најмањи број који није степен простог броја је $r = 6$, тако да по Теорему 2.15 питање егзистенције коначне пројективне равни реда 6 је еквивалентно егзистенцији пет међусобно ортогоналних латинских квадрата реда шест. Међутим, испоставља се да заправо не постоје ни два ортогонална латинска квадрата реда шест, односно не постоји грчко-латински квадрат реда шест.

Легенда каже да је Катарина Велика⁵⁹ поставила Ојлеру проблем 36 официра. Официри долазе из шест пукова и имају шест различитих чинова (један официр сваког чина из сваког пука) и потребно их је разместити на табли шест са шест тако да свака врста и свака колона садржи официра сваког чина, као и официра сваког пука. Очигледно је да решење овог проблема подразумева грчко-латински квадрат реда шест. Ојлер је проблем разматрао 1779. у [27] и убедио себе да је то немогуће, али није имао никакав записан доказ. У преписци из 1842. године, Шумахер⁶⁰ је писао Гаусу⁶¹, да је његов ученик Клаусен⁶² доказао да ортогонални латински квадрати реда шест не постоје [33].

За први сачуван коректан доказ овог проблема заслужан је Тари⁶³ [74]. Његов доказ из 1901. био је прилично дугачак, јер је посматрао 9408 посебних случајева које је појединачно разматрао [47]. Вреди напоменути да је 1984. Стинсон⁶⁴ у [70] дао кратак доказ овог тврђења. У сваком случају број шест је историјски први број за који је доказано да не може бити ред коначне пројективне равни.

⁵⁹Екатерина II Алексеевна (1729–1796), руска царица

⁶⁰Heinrich Christian Schumacher (1780–1850), немачко-дански астроном

⁶¹Carl Friedrich Gauß (1777–1855), немачки математичар

⁶²Thomas Clausen (1801–1885), дански математичар и астроном

⁶³Gaston Tarry (1843–1913), француски математичар

⁶⁴Douglas Robert Stinson (1956), канадски математичар

2.8 Егзистенција коначних равни *

Коначне пројективне равни реда n могу се представити помоћу матрица. **Матрица инциденције** је квадратна бинарна матрица реда $n^2 + n + 1$ (због Леме 2.12), где су праве представљене врстама, а тачке колонама, тако да врста i има 1 у колони j уколико је права која одговара врсти i инцидентна са тачком којој одговара колона j , у супротном на тој позицији стоји 0. На пример, Фаноовој равни одговара следећа матрица инциденције.

1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0

Врсте матрице инциденције можемо схватити као векторе. Како су две различите праве инцидентне са тачно једном заједничком тачком (Аксиома 2.2) то је скаларни производ две различите врсте једнак 1. Дуално, како су две различите тачке инцидентне са тачно једном правом (Аксиома 2.1) то је скаларни производ две различите колоне једнак 1. Скаларни производ врсте, односно колоне, са самом собом једнак је броју тачака инцидентних са правом, односно броју правих инцидентних са тачком, што је у нашем случају $n + 1$. Уколико матрицу инциденције означимо са A , наведене особине скаларног производа врста, односно колона, дају једначину

$$AA^T = A^T A = n \mathbb{1} + J, \quad (2.6)$$

где је $\mathbb{1}$ јединична матрица, а J матрица која се састоји само од јединица. На пример, једначина (2.6) омогућава да лако срачунамо детерминанту матрице инциденције A . Ако одузмемо прву врсту од свих осталих врсти, а затим додамо све колоне на прву колону, добијамо

$$\begin{aligned} \det(A^T A) &= \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & n+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ -n & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (n+1)^2 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = (n+1)^2 n^{n^2+n}, \end{aligned}$$

односно

$$\det A = \pm (n+1) n^{\frac{n^2+n}{2}}.$$

Да бисмо повезали коначне пројективне равни са матрицом инциденције потребни су нам неки стари резултати из теорије бројева који су истакнути у Секцији А.2.

Претпоставимо да постоји коначна пројективна равна реда n и нека је A њена матрица инциденције. По Леми 2.12 број тачака у равни је $N = n^2 + n + 1$, што је онда ред квадратне матрице A . Нека је $X = (x_1, \dots, x_N)$ вектор са рационалним улазима и нека је $Z = (z_1, \dots, z_N)$ такав да важи $Z = AX$, односно вредности z_i се добијају као линеарне комбинације вредности x_j . Применом једначине (2.6) добијамо

$$Z^T Z = X^T A^T A X = X^T (n \mathbb{1} + J) X = n X^T X + X^T J X,$$

те како је $Z^T Z = z_1^2 + \dots + z_N^2$, $X^T X = x_1^2 + \dots + x_N^2$ и $X^T J X = (x_1 + \dots + x_N)^2$, имамо

$$z_1^2 + \dots + z_N^2 = n(x_1^2 + \dots + x_N^2) + (x_1 + \dots + x_N)^2.$$

У случају да је $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$ имамо $N \equiv 3 \pmod{4}$, односно $N + 1$ је дељив са 4. Како сабирке желимо да поделимо у четворке додајемо nx_{N+1}^2 на обе стране једначине. Лагранжева⁶⁵ теорема о четири квадрата (Лема А.6) нам омогућава да уведемо замену $n = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2$ и тако добијемо

$$z_1^2 + \dots + z_N^2 + nx_{N+1}^2 = (x_1 + \dots + x_N)^2 + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) + \dots + (x_{N-2}^2 + x_{N-1}^2 + x_N^2 + x_{N+1}^2) \right).$$

По Леми А.5 производ збира четири квадрата је збир четири квадрата, одакле следи

$$z_1^2 + \dots + z_N^2 + nx_{N+1}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{N+1}^2 + (x_1 + \dots + x_N)^2,$$

где y_i линеарно зависе од x_j . Међутим, како је веза из Леме А.5 бијективна то линеарно повезујемо и x_j преко y_i , те како се z_k линеарно изражавају преко x_j коначно имамо да z_k линеарно зависе од y_i , при чему су коефицијенти рационални.

Наредну идеју спроводимо у N корака. На кораку i изражавамо y_i као линеарну комбинацију од $y_{i+1}, \dots, y_{N+1}$ са рационалним коефицијентима тако да важи $y_i^2 = z_i^2$. То радимо тако што најпре узимамо изражавање за z_i преко $y_1, \dots, y_{N+1}$, те како смо у претходних $i-1$ корака добили изражено $y_1, \dots, y_{i-1}$, можемо добити z_i као линеарну комбинацију од $y_i, \dots, y_{N+1}$. Нека је $z_i = c_i y_i + \dots + c_{N+1} y_{N+1}$ за неке рационалне бројеве $c_i, \dots, c_{N+1}$. У случају $c_i \neq 1$ постављамо $y_i = (c_{i+1} y_{i+1} + \dots + c_{N+1} y_{N+1}) / (1 - c_i)$, што даје $z_i = y_i$, док је иначе $c_i = 1$ те тада постављамо $y_i = -(c_{i+1} y_{i+1} + \dots + c_{N+1} y_{N+1}) / 2$, што даје $z_i = -y_i$. У сваком случају добијамо $y_i^2 = z_i^2$.

Након N корака добили смо изражавање за $y_1, \dots, y_N$ и y_{N+1} као слободан параметар, односно $y_1, \dots, y_N$ су неки рационални умношци од y_{N+1} , али линеарна веза са почетка каже да су то и $x_1, \dots, x_{N+1}$. Обезбедили смо $y_1^2 = z_1^2, y_2^2 = z_2^2, \dots, y_N^2 = z_N^2$, те после сређивања наша једначина постаје

$$nx_{N+1}^2 = y_{N+1}^2 + (x_1 + \dots + x_N)^2,$$

где је $x_{N+1} = q_1 y_{N+1}$ и $x_1 + \dots + x_N = q_2 y_{N+1}$ за неке рационалне бројеве q_1 и q_2 . Како је y_{N+1} произвољно, постављамо га на најмањи заједнички садржалац од имениоца бројева q_1 и q_2 , да бисмо добили целе бројеве x_{N+1} и $x_1 + \dots + x_N$. Коначно, проблем се своди на решавање једначине $nx^2 = y^2 + z^2$ у скупу целих бројева, где по Леми А.7, n мора бити збир два квадрата. То комплетира теорему коју су 1949. доказали Брук⁶⁶ и Рајзер⁶⁷ [14].

Теорема 2.16 (Брук–Рајзер). *Уколико постоји пројективна равна реда r за $r \equiv 1, 2 \pmod{4}$ тада је r збир два квадрата.*

Позитиван одговор на егзистенцију коначних пројективних равни реда r имали смо у случају да је r степен простог броја (на пример $\mathbb{F}_p, \mathbb{P}^2$), а сада имамо теорему која даје негативан одговор, на пример решава случајеве $r = 6, 14, 21, 22, \dots$ Као последицу имамо да број облика $8n + 6$ не може бити ред коначне пројективне равни.

Питање егзистенције пројективних равни реда r је превише компликовано јер поред већ наведених решен је једино случај $r = 10$. Наиме, Лам⁶⁸, Тиел⁶⁹ и Свеч⁷⁰ су

⁶⁵Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), италијанско-француски математичар и астроном

⁶⁶Richard Hubert Bruck (1914–1991), амерички математичар

⁶⁷Herbert John Ryser (1923–1985), амерички математичар

⁶⁸Clement W H Lam, канадски математичар

⁶⁹Larry H Thiel, канадски програмер

⁷⁰Stan Swiercz, канадски програмер

1989. на лукав начин искористили исцрпљујућу претрагу рачунара и добили компјутерски доказ да коначна пројективна раван реда 10 не постоји [49, 51]. Напоменимо да су и даље остали отворени случајеви $r = 12, 15, 18, 20, 24...$

ДЕЗАРГОВА, ПАПОСОВА И БАХМАНОВА РАВАН

3.1 Дезаргово тврђење

Под **фигуром** подразумевамо било који скуп тачака и правих пројективне равни. Ако у игру укључимо и релацију инцидентције између тачака и правих неке фигуре добијамо **конфигурацију**. У складу са Аксиомама 2.1 и 2.2, конфигурација има својство да постоји највише једна права инцидентна са две различите тачке, као и да постоји највише једна тачка која је инцидентна са две различите праве. **Геометријска конфигурација** је конфигурација код које је свака права инцидентна са константним бројем тачака, а свака тачка инцидентна са константним бројем правих. Ако је константа за број тачака на правој једнака константи за број правих кроз тачку онда је у питању **симетрична геометријска конфигурација**.

Неке фигуре и конфигурације имају посебну важност. **Низ тачака** чине све тачке инцидентне са неком правом. Низ тачака инцидентних са правом p обележавамо са (p) и кажемо да је права p носилац низа (p) . Дуална фигура низу тачака је **прамен правих**, а чине га све праве инцидентне са неком тачком. Прамен правих инцидентних са тачком A обележавамо са (A) и кажемо да је тачка A носилац прамена (A) .

Један од разлога што за низ тачака користимо ознаку (p) уместо самог p је тај што често радимо са прилично апстрактним конструкцијама (попут конструкције аналитичке равни $\mathbb{P}^2$), где је незгодно писати инцидентцију са $P \in p$. Захваљујући новој ознаци можемо писати чисто скуповно $P \in (p)$, уместо да инсистирамо на запису $P \in p$.

Фигура која се састоји од n тачака међу којима нема три колинеарне, и свих спојница њима одређеним, зове се **(нотни) n -теменик**. Фигура која се састоји од n правих међу којима нема три конкурентне, и свих сецишта њима одређеним, зове се **(нотни) n -страник**. Тачке ових фигура зовемо **темена**, док праве зовемо **странице**, како за n -теменик, тако и за n -страник. Напоменимо да су n -теменик и n -страник међусобно дуалне фигуре, али како n -теменик има n темена и $n(n-1)/2$ страница, а n -страник има $n(n-1)/2$ темена и n страница, то су они једнаки само у случају $n = 3$.

Најчешће радимо са случајевима $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. Фигура која се састоји од три неколинеарне тачке и три неконкурентне праве које су њима одређене зове се **шротеменик** (n -теменик за $n = 3$), а та иста фигура зове се и **шросраник** (n -страник за $n = 3$). **Четворотеменик** (n -теменик за $n = 4$) је фигура која се састоји од четири тачке од којих никоје три нису колинеарне, а она има четири темена и шест страница. Приметимо да Аксиома 2.3 заправо гарантује постојање четворотеменика. **Четворосраник** (n -страник за $n = 4$) је њему дуална фигура, а има четири странице и шест темена. Фигуре у случају $n = 5$ зовемо **петотеменик** и **петосраник**, а у

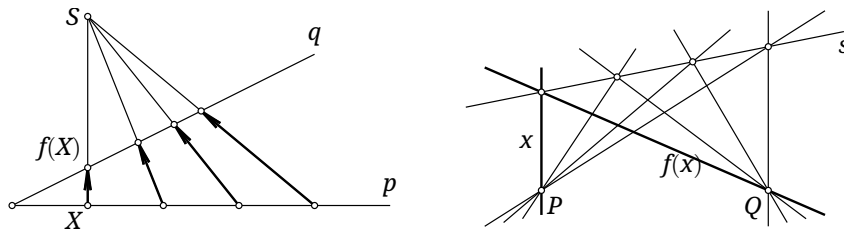
случају $n = 6$, **шестйойтеменик**, односно **шестйосйраник**.

Осим потпуних n -теменика и n -страника имамо потребу да дефинишемо и нешто рестриктивније фигуре. **Просй n -йтеменик** је фигура $T_1 T_2 \dots T_n$ која се састоји од n тачака $T_1, T_2, \dots, T_n$ датих у одређеном цикличном редоследу тако да сваке три узастопне нису колинеарне и од n правих $T_1 \vee T_2, T_2 \vee T_3, \dots, T_n \vee T_1$ које су спојнице узастопних тачака. Њему дуална фигура зове се **йпросй n -сйраник**, а евидентно је да је он исто што и прост n -теменик. Тачке, односно праве, простог n -теменика ће и даље бити темена, односно странице. За две странице простог n -страника које су инцидентне са истим теменом кажемо да су **суседне**, као и за два темена простог n -теменика која су инцидентна са истом страницом. За два темена T_i и T_j простог $2n$ -теменика $T_1 T_2 \dots T_{2n}$ кажемо да су **насйрамна** уколико је $|i - j| = n$.

Низ тачака и прамен правих су једнодимензиони објекти између којих природно можемо увести основна пресликавања по узору на доказ Леме 2.11. Нека је p права, а S тачка која није инцидентна са p . Посматрајмо низ (p) и прамен (S) . Прамен (S) можемо видети као скуп свих спојница $S \vee X$, где су X тачке из низа (p) . Важи и дуално, низ (p) можемо видети као скуп свих сецишта $p \wedge x$, где су x праве из прамена (S) . На овај начин успостављену бијекцију између низа (p) и прамена (S) зовемо **йерсйекйивийей** (или перспективно пресликавање). Са $(p) \bar{\wedge} (S)$ обележавамо перспективитет $f: (p) \rightarrow (S)$ дат са $f(X) = S \vee X$, док са $(S) \bar{\vee} (p)$ обележавамо њему инверзан перспективитет $f: (S) \rightarrow (p)$ дат са $f(x) = p \wedge x$.

У питању су основна пресликавања пројективне геометрије и уобичајено радимо са њиховим композицијама. Да бисмо компоновали два перспективитета неопходно је да се преклопи домен првог са кодоменом другог. Тада добијамо композицију као пресликавање код кога су и домен и кодомен истог типа (низ тачака или прамен правих). Овакво пресликавање такође зовемо **йерсйекйивийей**, али у том случају наводимо у односу на шта је оно перспективитет.

Перспективитет $(p) \bar{\wedge}^S (q)$ је пресликавање $f: (p) \rightarrow (q)$ дато са $f(X) = (S \vee X) \wedge q$, што је заправо композиција $((S) \bar{\vee} (q)) \circ ((p) \bar{\wedge} (S))$, при чему $S \in \mathcal{T}$ није инцидентно са $p, q \in \mathcal{P}$. Кажемо да је $(p) \bar{\wedge}^S (q)$ перспективитет низа (p) на низ (q) у односу на **ценйар йерсйекйиве** S , а основна одлика је колинеарност тачака $X, f(X)$ и S .



Сасвим слично постављамо дуалну дефиницију. Перспективитет $(P) \bar{\wedge}^S (Q)$ је пресликавање $f: (P) \rightarrow (Q)$ дато са $f(x) = (s \wedge x) \vee Q$, што је композиција $((s) \bar{\vee} (Q)) \circ ((P) \bar{\wedge} (s))$, при чему $s \in \mathcal{P}$ није инцидентно са $P, Q \in \mathcal{T}$. Кажемо да је $(P) \bar{\wedge}^S (Q)$ перспективитет прамена (P) на прамен (Q) у односу на **осу йерсйекйиве** s , а њена основна особина је конкурентност правих $x, f(x)$ и s .

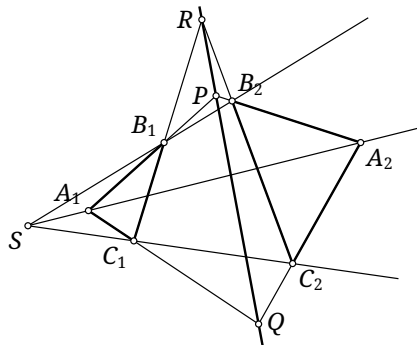
Перспективитети из претходних дефиниција се са низова тачака и праменова правих могу уопштити на фигуре. За две фигуре кажемо да су **йерсйекйивне у односу на йачку** (центар) S ако постоји бијективно пресликавање такво да су сваке две одговарајуће тачке заједно са S колинеарне. За две фигуре кажемо да су **йерсйекйивне у односу на йраву** (осу) s ако постоји бијективно пресликавање такво да су сваке две одговарајуће праве заједно са s конкурентне.

Изузетан значај у пројективној геометрији има Дезаргова теорема о два тротеменика која су у перспективном положају. Занимљиво је да Дезарг заправо никад

није објавио своју теорему, а њено прво појављивање везано је за практичну књигу о перспективи коју је 1648. објавио Дезаргов пријатељ и ученик Бос¹ [12].

Тврђење 3.1 (Дезаргово тврђење). *Ако су два троштеменика перспективна у односу на неку тачку, онда су они перспективни у односу на неку праву.*

Дезаргово тврђење заправо каже да ако два тротеменика имају центар, онда они имају и осу. У расписаном облику ово тврђење гласи: „Ако су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ такви да су праве $A_1\vee A_2$, $B_1\vee B_2$ и $C_1\vee C_2$ конкурентне, тада су тачке $(A_1\vee B_1)\wedge(A_2\vee B_2)$, $(A_1\vee C_1)\wedge(A_2\vee C_2)$ и $(B_1\vee C_1)\wedge(B_2\vee C_2)$ колинеарне.“



Још је рано да ово знаменито Дезаргово тврђење зовемо теорема, јер оно се не може доказати коришћењем досадашњих аксиома (Аксиоме 2.1, 2.2 и 2.3). Оно важи у (тродимензионом) пројективном простору (видети Теорему 3.8), али не увек када је оперативни простор само пројективна раван, што ћемо ускоро показати.

Дезарјева раван је пројективна раван у којој важи Дезаргово тврђење. Конфигурација Дезарговог тврђења састоји се од десет тачака и десет правих, при чему је свака права инцидентна са три тачке, а свака тачка инцидентна са три праве, те је у питању симетрична геометријска конфигурација. Она има много симетрија јер улога различитих тачака није фиксирана, односно било која од десет тачака може се узети за центар перспективе два тротеменика. Тврђење дуално Дезарговом зовемо Обратно Дезаргово тврђење.

Тврђење 3.2 (Обратно Дезаргово тврђење). *Ако су два тросијраника перспективна у односу на неку праву, онда су они перспективни у односу на неку тачку.*

Испоставља се да је Обратно Дезаргово тврђење (Тврђење 3.2) директна последица самог Дезарговог тврђења (Тврђење 3.1).

Теорема 3.3. *У Дезарјевој равни важи Обратно Дезарјево тврђење.*

Доказ. Нека су тространици који су перспективни у односу на праву заправо тротеменици B_1B_2P и C_1C_2Q , те су тачке $S = (B_1\vee B_2)\wedge(C_1\vee C_2)$, $A_1 = (B_1\vee P)\wedge(C_1\vee Q)$ и $A_2 = (B_2\vee P)\wedge(C_2\vee Q)$ колинеарне. Добијамо да су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективни у односу на S , те су по Дезарговом тврђењу тачке $P = (A_1\vee B_1)\wedge(A_2\vee B_2)$, $Q = (A_1\vee C_1)\wedge(A_2\vee C_2)$ и $R = (B_1\vee C_1)\wedge(B_2\vee C_2)$ колинеарне, одакле следи да су праве $B_1\vee C_1$, $B_2\vee C_2$ и $P\vee Q$ конкурентне у R , што је и требало доказати. $\square$

Како је тространик исто што и тротеменик, то се Дезаргово тврђење може третирати на следећи начин: „Два тротеменика су перспективна у односу на неку тачку ако и само ако су перспективна у односу на неку праву.“ Захваљујући Теорему 3.3, Принцип дуалности из Теореме 2.2 остаје на снази.

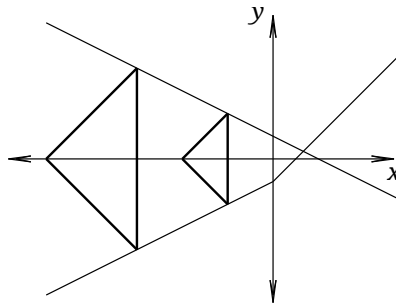
Теорема 3.4. *У Дезарјевој равни важи Принцип дуалности.*

¹Abraham Bosse (1604–1676), француски уметник

Међутим, испоставља се да постоје пројективне равни које нису Дезаргове. Елегантан пример не-Дезаргове равни 1902. је предложио Молтон² [57], а ми приказујемо једну варијацију на ту тему. **Молтонову раван** добијамо модификацијом проширене еуклидске равни $\mathbb{EP}^2 = (\mathcal{T}_\infty, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{I}_\infty)$. Задржаћемо тачке из $\mathcal{T}_\infty$, као и праве из $\mathcal{P}_\infty$ које су вертикалне ($x = n$) или имају непозитиван нагиб ($y = kx + n$, за $k \leq 0$). Што се тиче правих из $\mathcal{P}_\infty$ са позитивним нагибом ($y = kx + n$, за $k > 0$), задржаћемо стандардну инциденцију само на њеном делу где је $x \leq 0$, као и за њену бесконачну тачку, док ћемо за $x > 0$ удвостручити нагиб. Нове праве су тако изломљене праве описане једначином

$$y = \begin{cases} kx + n & \text{за } x \leq 0 \\ 2kx + n & \text{за } x > 0 \end{cases}$$

(за $k > 0$), при чему је изломљена права инцидентна са бесконачном тачком која одговара правој $y = kx + n$ из $\mathcal{P}_\infty$. Није тешко проверити да је овако конструисана Молтонова раван заиста пројективна раван.

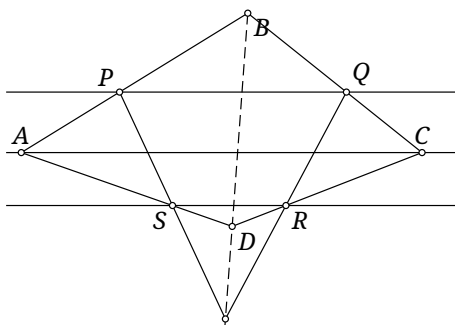


За конкретне тачке $A_1(-1, 1)$, $B_1(-1, -1)$, $C_1(-2, 0)$, односно $A_2(-3, 2)$, $B_2(-3, -2)$, $C_2(-5, 0)$ имамо троуглове $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ са паралелним странама $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$. Како се паралелне праве секу у бесконачним тачкама, а све бесконачне тачке леже на бесконачној правој u_∞ , то су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективни у односу на осу u_∞ . Међутим, они нису перспективни у односу на неки центар јер праве A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 нису конкурентне, што се лако проверава (видети слику). Дакле, у Молтоновој равни не важи Обратно Дезаргово тврђење, те по Теорему 3.3 не важи ни Дезаргово тврђење, односно Молтонова раван није Дезаргова раван.

Како Дезаргова конфигурација захтева десет тачака, у Фаноовој равни једноставно нема довољно тачака за контрапример, те Дезаргово тврђење тривијално важи. Штавише, све коначне пројективне равни реда $r \leq 8$ су Дезаргове. Међутим, постоје три различите не-Дезаргове равни реда девет, што су и најмањи контрапримери, а свака од њих има 91 тачку и 91 праву [78].

Пример 3.1. Испоставиће се да у реалној пројективној равни, а самим тим и у интуитивној пројективној равни, важи Дезаргово тврђење (Теорема 3.14). Основна примена Дезарговог тврђења може се видети у еуклидској равни кроз следећи задатак. У произвољан четвороугао уписан је трапез чије су основе паралелне једној дијагонали четвороугла. Доказати да се краци трапеза секу на другој дијагонали четвороугла.

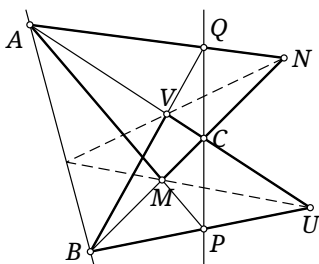
²Forest Ray Moulton (1872–1952), амерички астроном



Нека је $ABCD$ четвороугао при чему тачке P, Q, R, S леже редом на AB, BC, CD, DA , тако да су праве PQ, AC и SR паралелне. Бесконачна тачка правих паралелних са AC је центар перспективе троуглова APS и CQR . По Дезарговом тврђењу постоји оса на којој су тачке B, D и $PS \cap QR$, те су праве BD, PS, QR конкурентне.

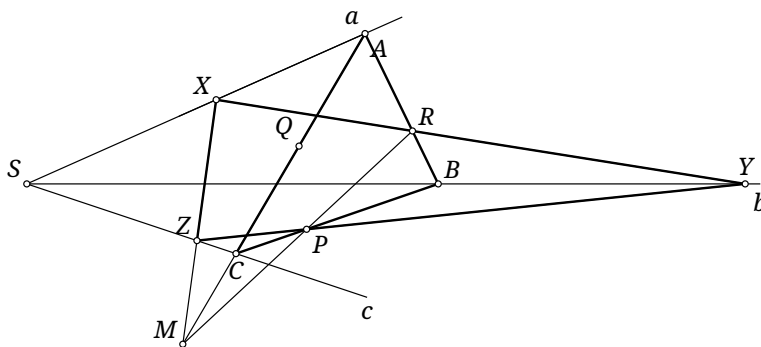
Алтернативно, права AC је оса перспективе троуглова PBQ и SDR , те по Обратном Дезарговом тврђењу постоји центар перспективе у пресеку правих BD, PS, QR . $\triangle$

Пример 3.2. У Дезарговој равни дате су неколинеарне тачке A, B, C и права p која је инцидентна са C . Нека су P и Q произвољне тачке инцидентне са p и нека важи $M = AP \cap BC, N = AQ \cap BC, U = BP \cap AC, V = BQ \cap AC$. Доказати да су праве AB, MU, NV конкурентне.



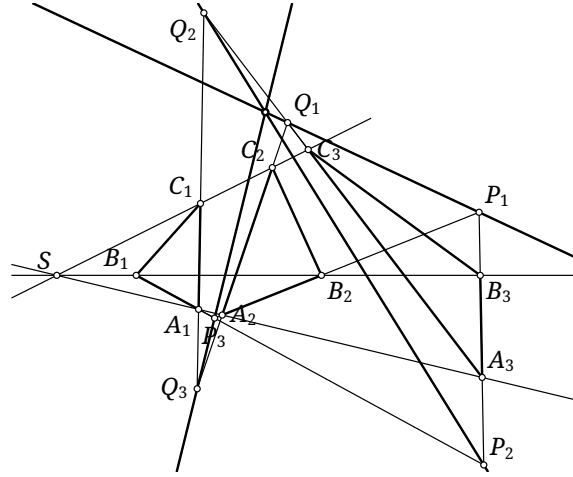
Како тачке $AM \cap BU = P, AN \cap BV = Q, MN \cap UV = C$ леже на p , то је p оса перспективе тротеменика AMN и BUV . По Обратној Дезарговој теорему они имају центар перспективе, те су праве AB, MU, NV конкурентне. $\triangle$

Пример 3.3. У Дезарговој равни дате су различите конкурентне праве a, b, c и тачке P, Q, R које им не припадају. Одредити тачке $A \in a, B \in b, C \in c$ тако да важи $P \in BC, Q \in AC, R \in AB$.



Нека је $Z \neq a \cap b$ произвољна тачка инцидентна са c . Желимо да тротеменик ABC имитирамо тротемеником XYZ , те постављамо $Y = ZP \cap b$, а затим $X = YR \cap a$. Да би тротеменик XYZ постао тротеменик ABC фали му још само $Q \in XZ$. Тротеменици XYZ и ABC имају центар перспективе у пресеку правих a, b, c . По Дезарговој теорему они имају осу, те су тачке $P = BC \cap YZ, R = AB \cap XY, M = AC \cap XZ$ колинеарне. Зато M добијамо са $M = PR \cap XZ$, а затим је $A = MQ \cap a, C = MQ \cap c$ и $B = AR \cap b$. $\triangle$

Пример 3.4. Нека у Дезарговој равни три тротеменика имају заједнички центар перспективе. Доказати да су одговарајуће три осе перспективе конкурентне праве.



Дезаргова теорема на тротеменицима $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ даје осу $s_3 = P_3Q_3$, где је $P_3 = A_1B_1 \wedge A_2B_2$, $Q_3 = A_1C_1 \wedge A_2C_2$. Дезаргова теорема на тротеменицима $A_1B_1C_1$ и $A_3B_3C_3$ даје осу $s_2 = P_2Q_2$, где је $P_2 = A_1B_1 \wedge A_3B_3$, $Q_2 = A_1C_1 \wedge A_3C_3$. Дезаргова теорема на тротеменицима $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ даје осу $s_1 = P_1Q_1$, где је $P_1 = A_2B_2 \wedge A_3B_3$, $Q_1 = A_2C_2 \wedge A_3C_3$. Посматрајмо тротеменике $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$, за које је $A_3 = P_1P_2 \wedge Q_1Q_2$, $A_2 = P_1P_3 \wedge Q_1Q_3$, $A_1 = P_2P_3 \wedge Q_2Q_3$. Како су тачке A_1, A_2, A_3 колинерне то оне чине осу перспективе, те применом Обрнуте Дезаргове теореме тротеменици имају центар, одакле су праве P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 , односно s_1, s_2, s_3 конкурентне.

Специјални случајеви се лако проверавају. На пример, уколико је $P_1 = P_2$, лако се види да мора бити $P_1 = P_3$, одакле $P_1 = P_2 = P_3 \in s_i$ за свако $i = 1, 2, 3$. $\triangle$

3.2 Пројективни простор

Иако смо пре свега заинтересовани за пројективне равни није лоше да аксиоматски уведемо и појам пројективног простора. Циљ је демонстрирати да Дезаргово тврђење јесте природна особина пројективне равни уколико је она смештена у пројективни простор. Аксиоматизација пројективног простора није лак задатак, морамо додати неке аксиоме, а неке модификовати. Уводимо још један основни скуп $\mathcal{R}$ чији су елементи *равни*, а ту су релације инциденције како између тачака и равни, тако и између правих и равни. За тачке које су инцидентне са истом равни кажемо да су **копланарне**, док су у супротном **некопланарне**. Аксиоме инциденције пројективног простора можемо увести на следећи начин:

Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите тачке; (3.1)

Постоји јединствена раван која је инцидентна са три неколинеарне тачке; (3.2)

$(\forall p \in \mathcal{P})(\forall \alpha \in \mathcal{R})(p \not\subset \alpha \Rightarrow (\exists! A \in \mathcal{T})(A \not\subset p) \wedge (A \not\subset \alpha));$ (3.3)

$(\forall A \in \mathcal{T})(\forall \alpha \in \mathcal{R})(\exists p \in \mathcal{P})(A \not\subset p) \wedge (p \not\subset \alpha) \Rightarrow A \not\subset \alpha;$ (3.4)

Постоје четири некопланарне тачке међу којима нема три колинеарне; (3.5)

Свака права инцидентна је са бар три тачке. (3.6)

Под (3.1) налази се Аксиома 2.1, тако да можемо задржати ознаку за спојницу $X \vee Y$ кад год су тачке X и Y различите. У пројективном простору нема места за Аксиому 2.2 јер две различите праве се секу само ако су инцидентне са истом равни. Овај проблем решавамо са (3.3) где гарантујемо егзистенцију и јединственост пресечне

тачке праве и равни (која је не садржи). Задржаћемо ознаку и за сециште, тако да ћемо ту заједничку тачку праве p и равни α која са њом није инцидентна обележити са $\alpha \wedge p$.

Додатна особина Аксиоме 2.2 била је да ограничи димензију пројективне равни на два, док (3.3) на сличан начин ограничава димензију пројективног простора на три. Систем аксиома који је изложио Хартсхорн у [38] гарантује само егзистенцију заједничке тачке праве и равни, због чега уводи нову аксиому по којој су две равни инцидентне са бар једном заједничком правом. Такав приступ прилично компликује доказе, пре свега доказ наредне леме која је овако директна последица јединствености из (3.3).

Лема 3.5. *Ако је раван инцидентна са две различите тачке онда је она инцидентна са њиховом спојницом.*

Раван је нови појам који је по (3.2) једнозначно одређен са три неколинеарне тачке. Раван коју једнозначно одређују тачке X , Y и Z обележавамо са (XYZ) кад год су те тачке неколинеарне. Како смо увели равни, самим тим инцидентност између тачака и равни, односно између правих и равни, неопходна нам је транзитивност релације инцидентности коју видимо у (3.4).

Аксиому 2.3 која нам је гарантовала егзистенцију основних појмова модификујемо са (3.5), тако да и даље постоји четворотеменик, међутим он је овде просторан, односно његова темена су некопланарна. Како нам је потребан и копланаран четворотеменик додајемо (3.6), што је раније била Лема 2.9.

Лема 3.6. *Свака раван инцидентна је са четири тачке међу којима нема три колинеарне.*

Доказ. Нека су A, B, C, D некопланарне тачке из (3.5) међу којима нема три колинеарне. Оне морају бити различите, а како нису све инцидентне са равни α , претпоставимо $D \not\in \alpha$. Тада је $(A \vee D) \not\subset \alpha$, јер иначе (3.4) из $(A \vee D) \subset \alpha$ са $DI(A \vee D)$ повлачи $DI\alpha$. Сада по (3.3) постоји тачка $A' = \alpha \wedge (A \vee D)$, а сасвим слично постоје и тачке $B' = \alpha \wedge (B \vee D)$ и $C' = \alpha \wedge (C \vee D)$. Претпоставимо да су тачке A', B', C' колинеарне. Тачке A', B', D су неколинеарне (иначе су са њима колинеарне и A, B, C), те постоји раван $(A'B'D)$. Она је по Леми 3.5 инцидентна са $A' \vee B'$, самим тим по (3.4) и са тачком C' . По Леми 3.5 раван $(A'B'D)$ је даље инцидентна са $D \vee A', D \vee B'$ и $D \vee C'$, самим тим по (3.4) и са A, B, C . Дакле, A, B, C, D су инцидентне са α и самим тим копланарне, што је контрадикција. Овим смо доказали да је произволна раван α инцидентна са три неколинеарне тачке A', B', C' . По (3.6) можемо изабрати нове тачке $A'' \in (A' \vee C')$ и $B'' \in (B' \vee C')$ те добити четворотеменик $A'A''B''B'$ чија су темена инцидентна са α . $\square$

Лема 3.7. *Постоји јединствена права која је инцидентна са две различите равни.*

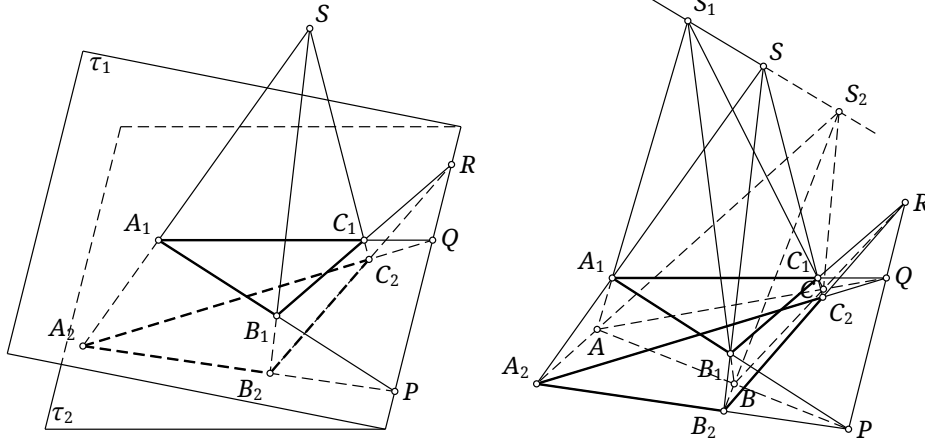
Доказ. Нека су α и β различите равни. По Леми 3.6 постоје неколинеарне тачке A, B, C које су инцидентне са α . По (3.2) све оне нису инцидентне са β , те нека је $C \not\in \beta$, што повлачи $(A \vee C) \not\subset \beta$ и $(B \vee C) \not\subset \beta$, одакле постоје тачке $M = \beta \wedge (A \vee C)$ и $N = \beta \wedge (B \vee C)$. Коначно, Лема 3.5 даје заједничку праву $M \vee N$. $\square$

Основна идеја је да свака раван пројективног простора чини пројективну раван у смислу дефиниције. Ако је $A \neq B$ са $A \in \alpha$ и $B \in \alpha$, тада по (3.1) постоји спојница $A \vee B$, која је по Леми 3.5 инцидентна са α , што проверава Аксиому 2.1. Нека је $p \neq q$ са $p \in \alpha$ и $q \in \alpha$. По (3.5) постоји тачка $A \in \alpha$. Нека је раван $\beta = (ABC)$, где су B и C тачке из (3.6) инцидентне са p . Како $q \in \beta$, то постоји тачка $S = \beta \wedge q$. За $S \in p$ имали бисмо $\beta = (SBC) = \alpha$, што доказује да је S заједничка тачка са којом су инцидентне p и q , те проверава Аксиому 2.2. Како је Аксиома 2.3 већ проверена у Леми 3.6 свака раван пројективног простора јесте пројективна раван. Додатно, у пројективном простору важи Дезаргово тврђење.

Теорема 3.8. *Раван пројективног простора је Дезарјева раван.*

Доказ. Већ смо показали да је свака раван пројективног простора једна пројективна раван, тако да можемо користити постојећу ознаку $p \wedge q$ за сециште, кад год су p и q различите праве инцидентне са истом равни. Преостаје нам да докажемо Дезаргово тврђење.

Нека је тачка S центар перспективе тротеменика $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, те нека је $\tau_1 = (A_1B_1C_1)$ и $\tau_2 = (A_2B_2C_2)$. У првом (и једноставнијем) случају претпоставимо $\tau_1 \neq \tau_2$. Праве $A_1 \vee B_1$ и $A_2 \vee B_2$ инцидентне су са равни (SA_1B_1) и зато имају сециште $P = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$. Сасвим слично добијамо тачке $Q = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $R = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$. Како су тачке P, Q, R инцидентне и са τ_1 и са τ_2 , по Леми 3.5 су инцидентне и са њиховом јединственом пресечном правом из Леме 3.7, те морају бити колинеарне.

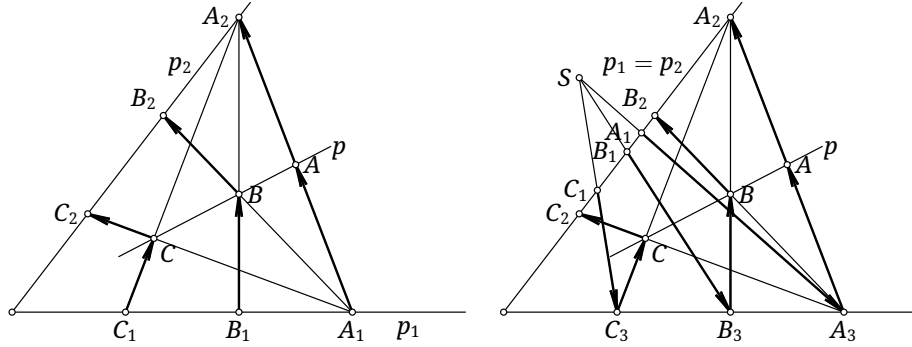


У случају $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ бирамо праву инцидентну са S која није инцидентна са τ , а онда тачке S_1 и S_2 које су са њом инцидентне. Како је $S = (A_1 \vee A_2) \wedge (S_1 \vee S_2)$, то су копланарне A_1, A_2, S_1, S_2 и постоји сециште $A = (S_1 \vee A_1) \wedge (S_2 \vee A_2)$. Сасвим слично постоје сецишта $B = (S_1 \vee B_1) \wedge (S_2 \vee B_2)$ и $C = (S_1 \vee C_1) \wedge (S_2 \vee C_2)$. Раван (ABC) је различита од τ , те можемо применити већ доказани случај теореме кад су равни тротеменика различите. Како су праве $A \vee A_1, B \vee B_1$ и $C \vee C_1$ инцидентне са S_1 , то су тачке $P_1 = (A \vee B) \wedge (A_1 \vee B_1)$, $Q_1 = (A \vee C) \wedge (A_1 \vee C_1)$ и $R_1 = (B \vee C) \wedge (B_1 \vee C_1)$ колинеарне. Како су праве $A \vee A_2, B \vee B_2$ и $C \vee C_2$ инцидентне са S_2 , то су тачке $P_2 = (A \vee B) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $Q_2 = (A \vee C) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $R_2 = (B \vee C) \wedge (B_2 \vee C_2)$ колинеарне. Тачке P_1 и P_2 су инцидентне и са правом $A \vee B$ и са равни $A_1A_2B_1B_2$, одакле мора бити $P_1 = P_2 = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$. Сасвим слично важи $Q_1 = Q_2 = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ и $R_1 = R_2 = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$. Коначно, тачке $P_1 = P_2, Q_1 = Q_2$ и $R_1 = R_2$ су инцидентне и са τ и са (ABC) , те су колинеарне (Лема 3.5 и Лема 3.7). $\square$

3.3 Проективитети

Перспективитети из уведених дефиниција су бијективна пресликавања чији су домени и кодомени низови тачака или праменови правих. **Пројективитет** је композиција коначно много перспективитета, а обележавамо га ознаком $(x) \bar{\wedge} (y)$, где су (x) и (y) , домен и кодомен, једнодимензиони објекти, низови тачака или праменови правих. Композиције пројективитета су пројективитети, те је добро увести нотацију у виду ланца, где се преклапају одговарајући кодомени и домени суседних пресликавања. Тако композицију $((y) \bar{\wedge} (z)) \circ ((x) \bar{\wedge} (y))$ можемо једноставније записати са $(x) \bar{\wedge} (y) \bar{\wedge} (z)$, док је $(p) \bar{\wedge} (S) \bar{\wedge} (q)$ заправо $(p) \bar{\wedge}^S (q)$.

Нека су A_1, B_1, C_1 различите тачке праве p_1 , а A_2, B_2, C_2 различите тачке праве p_2 , при чему је $p_1 \neq p_2$. Не умањујући општост претпоставимо $A_1 \neq p_1 \wedge p_2 \neq A_2$ јер сециште $p_1 \wedge p_2$ може бити укључено у највише два слова из скупа $\{A, B, C\}$, те у супротном само пермутујемо слова A, B и C . Тада $A_1 \notin (p_2)$, $A_2 \notin (p_1)$ и $A_1 \neq A_2$, што дефинише тачке $B = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$ и $C = (A_1 \vee C_2) \wedge (A_2 \vee C_1)$, као и тачку $A = (A_1 \vee A_2) \wedge (B \vee C)$ праве $p = B \vee C$. Ова конструкција доноси пројективитет $(p_1)_{\wedge}^{A_2}(p)_{\wedge}^{A_1}(p_2)$ за који важи $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A, B, C) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, те пресликава тачке A_1, B_1, C_1 редом у A_2, B_2, C_2 .



Уколико је $p_1 = p_2$, бирамо произвољну праву $p_3 \neq p_1$ и тачку $S \notin (p_1) \cup (p_3)$, те дефинишемо перспективитет $f = (p_1)_{\wedge}^S(p_3)$. Како је $p_3 \neq p_2$, по претходном закључку постоји пројективитет $(p_3)_{\wedge}(p_2)$ који пресликава $f(A_1), f(B_1), f(C_1)$ редом у A_2, B_2, C_2 , те пројективитет $(p_1)_{\wedge}^S(p_3)_{\wedge}(p_2)$ тачке A_1, B_1, C_1 шаље у A_2, B_2, C_2 и доказује наредну теорему.

Теорема 3.9. У пројективној равни постоји пројективитет који различите колинеарне тачке A_1, B_1, C_1 пресликава редом у различите колинеарне тачке A_2, B_2, C_2 .

Приметимо да су тачке A_i, B_i, C_i у Фаноовој равни буквално све тачке праве p_i за $1 \leq i \leq 2$, те да је за $p_1 \neq p_2$ сециште $p_1 \wedge p_2$ укључено у сваку тројку датих тачака. Међутим, били смо пажљиви и теорему смо доказали у произвољној пројективној равни, самим тим и у Фаноовој.

Штавише, пројективитет који смо успоставили између три пара одговарајућих елемената је композиција два (ако су носиоци различити) или три (ако су носиоци исти) перспективитета. Особина да се сваки пројективитет може се написати као композиција два (за различите носиоце) или три (за исте носиоце) перспективитета важи у општем случају у Дезарговој равни, за шта су нам потребне наредне две леме.

Лема 3.10. У Дезарговој равни, за различите конкурентне праве p_1, p_2, p_3 , композиција перспективитета $(p_1)_{\wedge}(p_2)_{\wedge}(p_3)$ је перспективитет.

Доказ. Нека су праве p_1, p_2, p_3 конкурентне у тачки T , те $f_1 = (p_1)_{\wedge}^{S_1}(p_2)$ и $f_2 = (p_2)_{\wedge}^{S_2}(p_3)$. За тачке $A_1, B_1 \in (p_1)$, поставимо $A_2 = f_1(A_1)$, $A_3 = f_2(A_2)$ и $B_2 = f_1(B_1)$, $B_3 = f_2(B_2)$. Ако је $T \neq A_1 \neq B_1 \neq T$, праве $A_1 \vee B_1 = p_1$, $A_2 \vee B_2 = p_2$ и $A_3 \vee B_3 = p_3$ су конкурентне, те тротеменици $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$ имају центар T . Дезаргово тврђење доноси осу, одакле су тачке $S_1 = (A_1 \vee A_2) \wedge (B_1 \vee B_2)$, $S_2 = (A_2 \vee A_3) \wedge (B_2 \vee B_3)$ и $(A_1 \vee A_3) \wedge (B_1 \vee B_3)$ колинеарне. Одавде су праве $A_1 \vee A_3$, $B_1 \vee B_3$ и $S_1 \vee S_2$ конкурентне, те је $f_2 \circ f_1$ перспективитет са центром $(A \vee A_2) \wedge (S_1 \vee S_2)$. $\square$

Лема 3.11. У Дезарговој равни, за различите неконкурентне праве p_1, p_2, p_3 , композиција перспективитета $f = (p_1)_{\wedge}(p_2)_{\wedge}(p_3)$ може се расставити на композицију перспективитета $f = (p_1)_{\wedge}(q)_{\wedge}(p_3)$, где је q произвољна права која није инцидентна са $p_1 \wedge p_3$ и није сјојница $X \vee f(X)$ за неко $X \in (p_1)$.

Доказ. Нека је $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(p_2)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3)$. Тачке $A = p_1 \wedge p_2$, $B = p_2 \wedge p_3$ и $C = p_1 \wedge p_3$ су неколинеарне. За $M = p_1 \wedge q$ и $N = p_3 \wedge q$ одмах имамо $f(M) \neq N$ и $M \neq C \neq N$.

Ако је $f(A) \neq N$ то важи $A \vee N \notin (S_2)$, што за $N \neq B$ даје $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(p_2)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(A \vee N)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3)$, те по Леми 3.10 постоји тачка S_3 таква да је $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(A \vee N)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3)$. Како је $f(M) \neq N$ то важи $M \vee N \notin (S_3)$, што за $M \neq A$ даје $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(M \vee N)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(A \vee N)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3)$ и Лема 3.10 доноси $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(q)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(p_3)$.

Ако је $f(M) \neq B$ то важи $M \vee B \notin (S_1)$, што за $M \neq A$ даје $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(M \vee B)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(p_2)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3)$, те по Леми 3.10 постоји тачка S_3 таква да је $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(M \vee B)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(p_3)$. Како је $f(M) \neq N$ то важи $M \vee N \notin (S_3)$, што за $N \neq B$ даје $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(M \vee B)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(M \vee N)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(p_3)$ и Лема 3.10 доноси $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(q)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(p_3)$.

Преостаје нам случај где је $f(A) = N$ и $f(M) = B$. Уколико је равна Фаноова, $q \neq p_2$ даје $f: (A, M, C) \mapsto (N, B, C)$ и $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^S(q)_{\bar{\wedge}}^S(p_3)$, где је $S = (A \vee N) \wedge (M \vee B)$. У супротном постоји тачка $N_1 \in (p_3) \setminus \{C, B, N\}$, где по већ виђеном добијамо $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(A \vee N_1)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3)$. Даље је $f(M) = B \neq N_1$, те $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(M \vee N_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(A \vee N_1)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3) = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(M \vee N_1)_{\bar{\wedge}}^{S_4}(p_3)$ за неку тачку S_4 . Коначно, $f(M) \neq N$ даје $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(M \vee N_1)_{\bar{\wedge}}^{S_4}(M \vee N)_{\bar{\wedge}}^{S_4}(p_3) = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_4}(q)_{\bar{\wedge}}^{S_4}(p_3)$. $\square$

Нека је $f = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(p_2)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_3)_{\bar{\wedge}}^{S_3}(p_4)$ тако да је $p_1 \neq p_4$. У најнезгоднијем случају имамо $p_1 = p_3$ и $p_2 = p_4$. У Фаноовој равни, како f фиксира $p_1 \wedge p_2$ лако се види да је f перспективитет, те можемо претпоставити да је свака тачка инцидентна са бар четири праве. Ако изаберемо праву $r \neq p, q$ која је инцидентна са $p_1 \wedge p_2$, а није инцидентна са S_1 , онда је $(p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(p_2)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_1) = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(r)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(p_2)_{\bar{\wedge}}^{S_2}(p_1) = (p_1)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(r)_{\bar{\wedge}}^{S_1}(p_1)$, што у основном облику за f поставља $p_2 \neq p_4$. Уколико је $p_1 = p_3$ и $p_2 \neq p_4$, или $p_1 \neq p_3$ и $p_2 = p_4$, једна примена Леме 3.11 обезбеђује да у основном облику за f све праве p_1, p_2, p_3, p_4 буду различите.

Ако су p_1, p_2, p_3 конкурентне, или су p_2, p_3, p_4 конкурентне, онда Лема 3.10 даје f као композицију два перспективитета. У супротном су p_1, p_2, p_4 неконкурентне или су p_1, p_3, p_4 неконкурентне. Ако су неконкурентне p_1, p_2, p_4 , Лема 3.11 нам омогућава да p_3 заменимо правом која је инцидентна са $p_1 \wedge p_2$, те добијамо да су p_1, p_2, p_3 конкурентне и Лема 3.10 смањује дужину низа за један, а слична је процедура ако су неконкурентне p_1, p_3, p_4 .

Овим смо показали да се пројективитет између различитих правих у Дезарговој равни који је композиција три перспективитета може написати као композиција не више од два перспективитета. Уколико је наш пројективитет између различитих правих композиција бар четири перспективитета, онда је довољно разрешити случај чији је подниз $(p_1)_{\bar{\wedge}}(p_2)_{\bar{\wedge}}(p_3)_{\bar{\wedge}}(p_1)_{\bar{\wedge}}(p_2)$. Тада по Леми 3.11 праву p_2 подниза $(p_1)_{\bar{\wedge}}(p_2)_{\bar{\wedge}}(p_3)$ можемо заменити неком другом правом и добити већ решен случај. У сваком случају не треба нам више од два перспективитета, а самим тим за пројективите између истих правих не више од три.

Теорема 3.12. У Дезарговој равни, сваки пројективитет је композиција највише три перспективитета, а највише два ако су домен и кодомен различити.

Напоменимо да сам концепт пројективитета потиче од Понселеа [64], док је $\bar{\wedge}$ као ознаку за пројективитет први увео Штаут [71]. Ознака $\bar{\wedge}$ за перспективит појавила се касније, а за њу је заслужан Веблен [76].

3.4 Аналитичка пројективна права

Посматрајмо аналитичку пројективну равна $\mathbb{P}^2 = (\mathcal{T}_{\mathbb{F}}, \mathcal{P}_{\mathbb{F}}, \mathcal{I}_{\mathbb{F}})$ индуковану пољем $\mathbb{F}$. Нека су A и B две различите тачке из $\mathcal{T}_{\mathbb{F}}$ дате својим хомогеним координатама.

Природно се поставља питање како описати све тачке са спојнице $A \vee B$. Тачка C припада правој $A \vee B$ ако и само ако је $(A \vee B) \cdot \vec{C} = 0$, а како по Лемми 2.5 важи $A \vee B = \vec{A} \times \vec{B}$, добијамо услов $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = 0$, односно $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = 0$, где је $[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ мешовити производ вектора. Кад $\vec{C}$ распишемо у бази $\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B}$ добијамо следећу лему.

Лема 3.13. *Важи $C \in (A \vee B)$ ако и само ако је $\vec{C} \propto \mu \vec{A} + \nu \vec{B}$ за неке $\mu, \nu \in \mathbb{F}$ без $\mu = 0 = \nu$.*

Аналићичку пројективну праву чине све тачке инцидентне са неком правом из $\mathbb{F}P^2$ и обележавамо је са $\mathbb{F}P^1$. Координатни систем на правој $A \vee B$ уводимо тако што фиксирамо векторе представнике $\vec{A}$ и $\vec{B}$, после чега Лема 3.13 произвољну тачку C праве $A \vee B$ једнозначно, до на множење скаларом, изражава са $\vec{C} \propto \mu \vec{A} + \nu \vec{B}$ за неке $\mu, \nu \in \mathbb{F}$ који нису истовремено нула. Тако добијамо хомогене параметре $(\mu : \nu)$ тачке C у односу на конкретне векторе представнике $\vec{A}$ и $\vec{B}$ тачака A и B .

Дуално, за две различите праве p и q , произвољна права r кроз тачку $p \wedge q$ може се изразити као вектор $\vec{r} \propto \xi \vec{p} + \zeta \vec{q}$ за неке $\xi, \zeta \in \mathbb{F}$ који нису истовремено нула. То нам даје хомогене параметре $(\xi : \zeta)$ праве r у односу на конкретне векторе представнике $\vec{p}$ и $\vec{q}$ правих p и q .

Често имамо потребу да из хомогених параметара $(\mu : \nu)$ (који нису једнозначно одређени) уклонимо неодређеност, што нас доводи до природног пресликавања

$$(\mu : \nu) = \left(\frac{\mu}{\nu} : 1 \right) \mapsto \frac{\mu}{\nu}.$$

Тако се тачке $(\mu : \nu)$ аналитичке праве $\mathbb{F}P^1$ са $\nu \neq 0$ поистовећују са елементима поља $\mathbb{F}$. Преостала тачка $(\mu : 0) = (1 : 0)$ је налик бесконачној тачки из интуитивне равни и њој додељујемо симбол ∞ . Ово доводи до проширења поља $\mathbb{F} = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$, где дефинишемо пресликавање $*$: $\mathbb{F}P^1 \rightarrow \mathbb{F}$ са $(\mu : \nu)^* = \mu/\nu$ које зовемо **дехомојенизација**.

У свакој аналитичкој пројективној равни $\mathbb{F}P^2$ природно важи Дезаргово тврђење. Нека су тротеменици $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ перспективни у односу на центар S којем фиксирамо вектор представник $\vec{S}$. Како је S на правој $A_1 \vee A_2$, то постоје $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, тако да је $\vec{S} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ (у питању су вектори представници $\mu \vec{A}_1$ и $\nu \vec{A}_2$ из Леме 3.13). Слично, постоје одговарајући вектори тако да важи $\vec{S} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$, односно $\vec{S} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$.

Из једнакости $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{S}$ важи $\vec{A}_1 - \vec{B}_1 = \vec{B}_2 - \vec{A}_2 = \vec{P}$. Применимо ли Лему 3.13 на тачку $P = [P]$ добијамо $PL(A_1 \vee B_1)$ (због $\vec{P} = \vec{A}_1 - \vec{B}_1$) и $PL(A_2 \vee B_2)$ (због $\vec{P} = \vec{B}_2 - \vec{A}_2$), те је $P = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$. Сасвим слично из $\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 = \vec{S}$ имамо $\vec{B}_1 - \vec{C}_1 = \vec{C}_2 - \vec{B}_2 = \vec{Q}$ и важи $Q = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$, док из $\vec{C}_1 + \vec{C}_2 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{S}$ добијамо $\vec{C}_1 - \vec{A}_1 = \vec{A}_2 - \vec{C}_2 = \vec{R}$ и важи $R = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$. Из претходних једначина добијамо $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = (\vec{A}_1 - \vec{B}_1) + (\vec{B}_1 - \vec{C}_1) + (\vec{C}_1 - \vec{A}_1) = \vec{0}$, те су по Лемми 3.13 тачке P, Q, R колинеарне и чине осу перспективе тротеменика $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, што доказује наредну теорему.

Теорема 3.14. *Аналићичка пројективна раван је Дезаргова раван.*

Пројективитети су композиције перспективитета и рад на њима можемо наставити употребом хомогених координата. Како желимо да изведемо формуле пројективитета, најпре ћемо се позабавити перспективитетима. Нека су дате права s и тачка $S \notin (s)$, те нека су A и B различите тачке низа тачака (s) , а p и q различите праве прамена правих (S) . Фиксирањем конкретних вектора представника $\vec{A}$ и $\vec{B}$, односно $\vec{p}$ и $\vec{q}$, одређујемо хомогене координатне системе на (s) и (S) , при чему напомињемо да они сада имају координате дужине два, а не три као што је раније био случај.

Посматрајмо перспективитет $(s)\bar{\wedge}(S)$ који тачку $X \in (s)$ слика у праву $x \in (S)$ тако да важи $x = X \vee S$, односно $X = x \wedge s$. Ако тачка X низа (s) има координате $(\mu : \nu)$, а права x прамена (S) има координате $(\mu' : \nu')$, то инциденција између њих $X \in (x)$ даје

$$\vec{x} \cdot \vec{X} = (\mu' \vec{p} + \nu' \vec{q}) \cdot (\mu \vec{A} + \nu \vec{B}) = 0$$

Одавде добијамо однос $(\mu' : \nu') = ((-\vec{q} \cdot (\mu\vec{A} + \nu\vec{B})) : (\vec{p} \cdot (\mu\vec{A} + \nu\vec{B})))$, који можемо записати у матричном облику

$$\lambda \begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{q} \cdot \vec{A} & -\vec{q} \cdot \vec{B} \\ \vec{p} \cdot \vec{A} & \vec{p} \cdot \vec{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Веза између вектора координата је једна линеарна трансформација дата матрицом

$$M = \begin{pmatrix} -\vec{q} \cdot \vec{A} & -\vec{q} \cdot \vec{B} \\ \vec{p} \cdot \vec{A} & \vec{p} \cdot \vec{B} \end{pmatrix},$$

чија је детерминанта

$$\begin{aligned} \det(M) &= (\vec{q} \cdot \vec{B})(\vec{p} \cdot \vec{A}) - (\vec{p} \cdot \vec{B})(\vec{q} \cdot \vec{A}) = ((\vec{q} \cdot \vec{B})\vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{B})\vec{q}) \cdot \vec{A} \\ &= (\vec{B} \times (\vec{p} \times \vec{q})) \cdot \vec{A} = [\vec{B}, \vec{p} \times \vec{q}, \vec{A}] = [\vec{A}, \vec{B}, \vec{p} \times \vec{q}] = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{p} \times \vec{q}). \end{aligned}$$

Како је $\vec{s} = \overrightarrow{A \vee B} \propto \vec{A} \times \vec{B}$ и $\vec{S} = \overrightarrow{p \wedge q} \propto \vec{p} \times \vec{q}$, то из $S \notin (s)$ добијамо $\det(M) \neq 0$, те је матрица M регуларна и обратна веза $(\mu : \nu)$ преко $(\mu' : \nu')$ дата је њој инверзном матрицом M^{-1} . Самим тим основни перспективитет у $\mathbb{FP}^2$ је индукован регуларном линеарном трансформацијом. Како је пројективитет композиција коначно много таквих перспективитета онда је и он индукован регуларном линеарном трансформацијом.

Теорема 3.15. *Пројективитет у $\mathbb{FP}^2$ је индукован регуларном линеарном трансформацијом.*

Веза између хомогених координата (локалне координате у $\mathbb{FP}^1$) при пројективитету је једна регуларна квадратна матрица реда два са коефицијентима из $\mathbb{F}$, а важно је напоменути да због хомогености, матрице M и λM за $\lambda \neq 0$ представљају исти пројективитет.

Испитајмо промену координатног система. Нека је први координатни систем задат векторима $\vec{A}$ и $\vec{B}$, а други векторима $\vec{P}$ и $\vec{Q}$, где су A, B, P, Q тачке из $\mathbb{FP}^1$. Произвољна тачка C може се изразити са $\vec{C} \propto \mu\vec{A} + \nu\vec{B}$, али и са $\vec{C} \propto \mu'\vec{P} + \nu'\vec{Q}$. Како су P и Q тачке праве $A \vee B$ то постоје неки скалари $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такви да је $\vec{P} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ и $\vec{Q} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$. Имамо $\mu\vec{A} + \nu\vec{B} \propto \vec{C} \propto \mu'(\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}) + \nu'(\gamma\vec{A} + \delta\vec{B}) = (\alpha\mu' + \gamma\nu')\vec{A} + (\beta\mu' + \delta\nu')\vec{B}$, одакле добијамо

$$\lambda \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix}.$$

Како су P и Q различите тачке то је $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ и промена координата је такође индукована регуларном матрицом.

Теорема 3.16. *Промена координата у $\mathbb{FP}^1$ је индукована регуларном линеарном трансформацијом.*

Последње две теореме говоре да је веза између хомогених координата како при пројективитету тако и при промени координатног система, индукована једном регуларном матрицом. Суштински ради се о истој ствари посматраној на два различита начина, а у питању су активни (пресликавање мења тачке, а оставља исти координатни систем) и пасивни (тачка остаје иста, али се мења координатни систем) приступ.

Теорема 3.17. *Нека су даћи хомогени координатни системи за праве p и q из $\mathbb{FP}^2$. Постоји јединствено пресликавање индуковано регуларном линеарном трансформацијом које произвољне три различите тачке са p пресликава редом у произвољне три различите тачке са q .*

Доказ. Довољно је показати да постоји јединствено пресликавање индуковано регуларном линеарном трансформацијом које повезује базне хомогене координате $(1 : 0)$, $(0 : 1)$ и $(1 : 1)$ са три произвољне тачке $(\mu_1 : \nu_1)$, $(\mu_2 : \nu_2)$ и $(\mu_3 : \nu_3)$ неке праве. Тада можемо повезати базне хомогене координате са три тачке праве p регуларном матрицом M_1 , као и са три тачке праве q регуларном матрицом M_2 , одакле добијамо везу између тројки тачака са p и са q преко регуларне матрице $M_2 \circ M_1^{-1}$.

Тражена пројективна трансформација је облика

$$\lambda \begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

Из $(1 : 0) \mapsto (\mu_1 : \nu_1)$ имамо $\lambda_1 \mu_1 = m_{11}$ и $\lambda_1 \nu_1 = m_{21}$, док из $(0 : 1) \mapsto (\mu_2 : \nu_2)$ имамо $\lambda_2 \mu_2 = m_{12}$ и $\lambda_2 \nu_2 = m_{22}$. Из последње везе, $(1 : 1) \mapsto (\mu_3 : \nu_3)$, добијамо једначине $\lambda_3 \mu_3 = m_{11} + m_{12}$ и $\lambda_3 \nu_3 = m_{21} + m_{22}$. Ових шест хомогених једначина са седам непознатих дају јединствено решење. На пример, можемо све почетне једначине сменили у последње две за $\lambda_3 \mu_3 = \lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2$ и $\lambda_3 \nu_3 = \lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2$, што у матричном облику гласи

$$\lambda_3 \begin{pmatrix} \mu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Како су тачке $(\mu_1 : \nu_1)$ и $(\mu_2 : \nu_2)$ различите то је матрица везе регуларна и добијамо до на множење скаларом јединствено решење за λ_1 , λ_2 и λ_3 кроз једначину

$$\frac{1}{\lambda_3} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1} \begin{pmatrix} \nu_2 \mu_3 - \mu_2 \nu_3 \\ \mu_1 \nu_3 - \nu_1 \mu_3 \end{pmatrix},$$

што једнозначно доноси улазне вредности почетне матрице

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} \mu_1(\nu_2 \mu_3 - \mu_2 \nu_3) & \mu_2(\mu_1 \nu_3 - \nu_1 \mu_3) \\ \nu_1(\nu_2 \mu_3 - \mu_2 \nu_3) & \nu_2(\mu_1 \nu_3 - \nu_1 \mu_3) \end{pmatrix},$$

и комплетира доказ. □

Претходна теорема омогућава да пројективитете у $\mathbb{FP}^2$ поистоветимо са регуларним квадратним матрицама реда два са коефицијентима у $\mathbb{F}$, посеченим по релацији сразмерности.

По Теореме 3.15 сваки пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом, те преостаје да размотримо обрат. Нека је f индуковано регуларном линеарном трансформацијом хомогених координата. Ако су A_1, B_1, C_1 различити елементи из домена од f (колинеарне тачке низа тачака или конкурентне праве прамена правих), одговарајуће различите (колинеарне или конкурентне) елементе из кодомена добијамо са $A_2 = f(A_1), B_2 = f(B_1), C_2 = f(C_1)$. По Теореме 3.9 постоји пројективитет који слика $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, а по Теореме 3.15, он је индукован регуларном линеарном трансформацијом хомогених координата чију јединственост гарантује Теорема 3.17, те је у питању баш f , што доказује наредну теорему.

Теорема 3.18. *Пресликавање између једнодимензионих објеката у $\mathbb{FP}^2$ је пројективније ако и само ако је оно индуковано регуларном линеарном трансформацијом хомогених координата.*

Теореме 3.17 и 3.18 нам говоре да је пројективитет у $\mathbb{FP}^2$ једнозначно одређен са три пара одговарајућих елемената. То је особина коју зовемо **Основна теорема пројективније**, о чему ће касније бити речи (Тврђење 3.32).

Пример 3.5. Тачке $A_1(2 : 1)$, $A_2(3 : 1)$ и $B(4 : 1)$ дате хомогеним координатама $(x_1 : x_2)$ одабране су тим редом за базне тачке новог система хомогених координата $(x'_1 : x'_2)$. Одредимо везу између старих и нових координата.

Промена координата у $\mathbb{RP}^1$ је индукована регуларном линеарном трансформацијом

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix},$$

где је $(x'_1 : x'_2) \mapsto (x_1 : x_2)$ спрега између нових и старих координата произвољне тачке. У новом систему дате тачке су базне, односно имају координате $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$, те користимо везе $(1 : 0) \mapsto (2 : 1)$, $(0 : 1) \mapsto (3 : 1)$ и $(1 : 1) \mapsto (4 : 1)$ које нас доводе до коефицијената тражене матрице. Добијамо систем једначина

$$\begin{array}{l|l|l} 2\lambda_1 = m_{11} & 3\lambda_2 = m_{12} & 4\lambda_3 = m_{11} + m_{12} \\ \lambda_1 = m_{21} & \lambda_2 = m_{22} & \lambda_3 = m_{21} + m_{22} \end{array}$$

одакле следи $4(\lambda_1 + \lambda_2) = 2\lambda_1 + 3\lambda_2$, односно $\lambda_2 = -2\lambda_1$. Одавде је јединствено решење $m_{11} = 2\lambda_1$, $m_{21} = \lambda_1$, $m_{12} = -6\lambda_1$, $m_{22} = -2\lambda_1$, где $\lambda_1 \neq 0$. Тражена веза је

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

јер је пронађена матрица случајно сразмерна свом инверзу.

Напоменимо да при одређивању коефицијената тражене матрице одмах можемо елиминисати параметре λ . Наиме, за тачку A_1 одмах имамо $m_{11} = 2m_{21}$, за тачку B је $m_{12} = 3m_{22}$, док за тачку C важи $m_{11} + m_{12} = 4(m_{21} + m_{22})$. Овако уместо система 6 једначина са 7 непознатих решавамо систем 3 једначине са 4 непознате. $\triangle$

Пример 3.6. Пронађимо формуле пројективитета који пресликава тачке $A(0 : 1)$, $B(1 : 0)$, $C(1 : 1)$ у тачке $A'(1 : -1)$, $B'(1 : 1)$, $C'(1 : 3)$. Пројективитет $\lambda \vec{X}' = M \vec{X}$ је индукован регуларном линеарном трансформацијом

$$M \propto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Везе $(0, 1) \mapsto (1, -1)$, $(1, 0) \mapsto (1, 1)$ и $(1, 1) \mapsto (1, 3)$ одређују систем једначина

$$\begin{array}{l|l|l} \lambda_1 = m_{12} & \lambda_2 = m_{11} & \lambda_3 = m_{11} + m_{12} \\ -\lambda_1 = m_{22} & \lambda_2 = m_{21} & 3\lambda_3 = m_{21} + m_{22}, \end{array}$$

а елиминација параметара даје $m_{12} = -m_{22}$, $m_{11} = m_{21}$, $3(m_{11} + m_{12}) = m_{21} + m_{22}$. Заменом прве и друге једначине у трећу, добијамо $2m_{11} = 4m_{22}$, одакле се добија

$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \vec{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \vec{X},$$

што је тражена матрица, односно тражене формуле пројективитета. $\triangle$

3.5 Дворазмера

Наставимо са изучавањем хомогених координата на аналитичкој пројективној правој. Нека су A, B, C, D различите колинеарне тачке из $\mathbb{FP}^1$. За њихове векторе представнике хомогених параметара у неком координатном систему можемо посматрати израз

$$(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}) = \frac{\det(\vec{A}, \vec{C}) \det(\vec{B}, \vec{D})}{\det(\vec{A}, \vec{D}) \det(\vec{B}, \vec{C})}.$$

Вектори представници уведених тачака су $\alpha\vec{A}, \beta\vec{B}, \gamma\vec{C}, \delta\vec{D}$ за ненула скаларе $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$, где из $\det(\kappa\vec{X}, \lambda\vec{Y}) = \kappa\lambda \det(\vec{X}, \vec{Y})$ добијамо $(\alpha\vec{A}, \beta\vec{B}, \gamma\vec{C}, \delta\vec{D}) = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D})$, што значи да почетни израз не зависи од избора вектора представника. За регуларну квадратну матрицу M реда два је

$$\det(M\vec{X}, M\vec{Y}) = \det(M(\vec{X}, \vec{Y})) = \det(M) \det(\vec{X}, \vec{Y}),$$

одакле следи $(M\vec{A}, M\vec{B}, M\vec{C}, M\vec{D}) = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D})$. По Теореме 3.16, промена координата је индукована регуларном линеарном трансформацијом, те почетни израз не зависи ни од избора координатног система, чиме обезбеђујемо да је наредна дефиниција добра.

Нека су A, B, C, D различите тачке у $\mathbb{F}\mathbf{P}^1$, тада је њихова **дворазмера** $(ABCD)$ скалар из $\mathbb{F}$ дат са

$$(ABCD) = \frac{\det(\vec{A}, \vec{C}) \det(\vec{B}, \vec{D})}{\det(\vec{A}, \vec{D}) \det(\vec{B}, \vec{C})}. \quad (3.7)$$

По Теореме 3.15 пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом (као што је то и промена координата), тако да се дворазмера не мења приликом пројективитета.

Теорема 3.19. *Дворазмера је инваријантна пројективитета.*

Чест начин рачунања дворазмере је управо у координатном систему одређеним са $\vec{A}$ и $\vec{B}$. Тада је одмах $\vec{A} = (1, 0)$ и $\vec{B} = (0, 1)$, док за $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ и $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$ имамо $\vec{C} = (\alpha, \beta)$ и $\vec{D} = (\gamma, \delta)$. Директан рачун по формули (3.7) даје

$$(ABCD) = \frac{\beta(-\gamma)}{\delta(-\alpha)} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma},$$

што је размера две размере и тако оправдава име дворазмера. Директно из (3.7) рачунамо дворазмере за пермутације тачака

$$\begin{aligned} (CDAB) &= \frac{(-\beta)\gamma}{\alpha(-\delta)} = \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = (ABCD); \\ (BACD) &= \frac{(-\alpha)\delta}{(-\gamma)\beta} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma} = \frac{1}{(ABCD)}; \\ (ACBD) &= \frac{1(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\delta\alpha} = 1 - \frac{\beta\gamma}{\alpha\delta} = 1 - (ABCD). \end{aligned}$$

Редослед тачака посматране четворке је веома важан, а дворазмере свих пермутација можемо добити коришћењем претходних правила која ћемо пописати у наредној теореме.

Теорема 3.20. *За различите тачке A, B, C, D из $\mathbb{F}\mathbf{P}^1$ важи:*

$$\begin{aligned} (ABCD) &= (BADC) = (CDAB) = (DCBA); \\ (BACD) &= (ABCD)^{-1}; \\ (ACBD) &= 1 - (ABCD). \end{aligned}$$

Коришћењем дехомогенизације $*$: $\mathbb{F}\mathbf{P}^1 \rightarrow \bar{\mathbb{F}}$ лако можемо изразити дворазмеру са

$$(ABCD) = \frac{(A^* - C^*)(B^* - D^*)}{(A^* - D^*)(B^* - C^*)} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} : \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}. \quad (3.8)$$

Одавде се види геометријски смисао дворазмере као однос одговарајућих растојања између тачака, или односа одговарајућих дужина дужи. Дворазмера је дефинисана за различите колинеарне тачке, тако да она не може бити једнака 0 или 1 (нити ∞).

Нека су A, B, C различите тачке аналитичке пројективне праве $\mathbb{P}^1$. Ако најпре фиксирамо вектор представник $\vec{C}$, а затим изаберемо векторе представнике $\vec{A}$ и $\vec{B}$ тако да је $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, добили бисмо координатни систем у којем дате тачке имају базне координате: $A(1 : 0)$, $B(0 : 1)$ и $C(1 : 1)$. У овом координатном систему, једноставан рачун показује да $D \in \mathbb{P}^1 \setminus \{A, B, C\}$ има хомогене координате $((ABCD) : 1)$, што доказује наредну лему.

Лема 3.21. *За три различите тачке A, B, C у $\mathbb{P}^1$ и скалар $a \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$ постоји јединствена тачка D таква да је $(ABCD) = a$.*

Уколико бисмо дворазмеру проширили на произвољне, не нужно различите, колинеарне тачке, за кодомен бисмо добили читав $\mathbb{F}$. Наиме, у случају фиксираних различитих A, B, C имали бисмо $(ABCA) = \infty$, $(ABCB) = 0$ и $(ABCC) = 1$, што оправдава да ти скалари не могу бити вредности оригиналне дворазмере. Претходна лема омогућава да једноставно докажемо следећу теорему.

Теорема 3.22. *Нека су A, B, C, D и A', B', C', D' две четворке различитих колинеарних тачака у $\mathbb{P}^2$. Тада постоји јединствен пројективитет ϕ са $(A, B, C, D) \mapsto (A', B', C', D')$ ако и само ако је $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Доказ. Како је по Теорему 3.19 дворазмера инваријанта пројективитета то је један смер очигледан. Са друге стране, по Теорему 3.17 постоји јединствен пројективитет f који слика $(A, B, C) \mapsto (A', B', C')$. Уколико је $f(D) = X$, тада по Теорему 3.19 добијамо $(A'B'C'D') = (ABCD) = (A'B'C'X)$, одакле Лема 3.21 даје $D' = X$. $\square$

Дворазмера је најстарија и најосновнија пројективна инваријанта. Значајно дело из античког доба је Књига 7 Папосовог *Зборника* које је цитирао Шал у свом *Историјском прегледу* [15] и тако скренуо пажњу на њега. Џонс³ га је 1986. превео на енглески, а затим у коментарима показао како се Папосове леме повезују са модерном терминологијом [43], што недвосмислено говори о томе да је Папос био свестан концепта дворазмере и имплицитно га употребљавао. Варијанта дворазмере у сферној геометрији појављује се још раније у књизи *Сферика* коју је писао Менелај⁴, док је вероватно и сам Еуклид знао за инваријантност дворазмере [18].

Пример 3.7. За тачке $A(0 : 1)$, $B(1 : 0)$, $C(1 : 1)$, $D(3 : 2)$ дате својим хомогеним координатама у $\mathbb{P}^1$ желимо да одредимо дворазмеру $(ABCD)$. Природни представници су $\vec{A} = (0, 1)$, $\vec{B} = (1, 0)$, $\vec{C} = (1, 1)$, $\vec{D} = (3, 2)$, одакле имамо $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ и $\vec{D} = 2\vec{A} + 3\vec{B}$, те добијамо $(ABCD) = (1/1) : (3/2) = 2/3$. Алтернативно можемо приметити да су B, A, C базне тачке те је $(BACD) = 3/2$, односно $(ABCD) = 2/3$. $\triangle$

Пример 3.8. Нека су A_1, A_2, A_3, A_4 различите тачке реалне пројективне праве. Колико износи производ и сума дворазмера по свим пермутацијама датих тачака? По Теорему 3.20 важи $(ABCD) \cdot (ABDC) = 1$, као и $(ABCD) + (ACBD) = 1$. У оба случаја свака од 24 пермутација има свој пар, те је $\prod_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = 1^{12} = 1$, односно $\sum_{\sigma \in S_4} (A_{\sigma 1} A_{\sigma 2} A_{\sigma 3} A_{\sigma 4}) = 12 \cdot 1 = 12$. $\triangle$

Пример 3.9. Ако су A, B, C, D различите колинеарне тачке реалне пројективне равни, онда је тачно једна негативна од три дворазмере: $(ABCD)$, $(ACBD)$, $(ADBC)$. Ако означимо $x = (ABCD)$, из особина дворазмере имамо $(ACBD) = 1 - x$ и $(ADBC) = 1 - 1/x$, те добијамо $(ABCD)(ACBD)(ADBC) = x(1 - x)(1 - 1/x) = -(x - 1)^2 < 0$, одакле следи непаран број негативних дворазмера. Како је $(ABCD) + (ACBD) = 1 > 0$, то је бар једна дворазмера позитивна, те је тачно једна негативна, а преостале две су позитивне. $\triangle$

³Alexander Raymond Jones, амерички историчар математике

⁴Менелај из Александрије, Μενέλαος (1. и 2. век н.е.), грчки математичар и астроном

Пример 3.10. Дворазмера $(ADEB)$ се може изразити преко $(ABCD)$ и $(ACBE)$. Ако поставимо $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$, $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$, $\vec{E} = \mu\vec{A} + \nu\vec{B}$, имамо

$$(ABDE) = \frac{\delta}{\gamma} : \frac{\nu}{\mu} = \left(\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\nu}{\mu} \right) : \left(\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma} \right) = (ABCE) : (ABCD),$$

те из особина дворазмере добијамо

$$(ADEB) = \frac{1}{(ADBE)} = \frac{1}{1 - (ABDE)} = \frac{1}{1 - \frac{(ABCE)}{(ABCD)}} = \frac{1}{1 - \frac{1 - (ACBE)}{(ABCD)}} = \frac{(ABCD)}{(ABCD) + (ACBE) - 1}.$$

△

Пример 3.11. Нека је $(ABCD) = 2$, $(ABCE) = 3$, $(ADEB) = -2$, а f пројективитет за који је $f(A) = D$, $f(B) = E$, $f(C) = F$, $f(D) = G$. Колико је $(ABCG)$?

Резултат не зависи од избора хомогеног система координата, те га уводимо са $A(1 : 0)$, $B(0 : 1)$, $C(1 : 1)$. Сада тачка X има координате $((ABCX) : 1)$, те је $D(2 : 1)$, $E(3 : 1)$. Како је $\vec{E} = \vec{A} + \vec{D}$ и $(ADEB) = -2$, то је $\vec{F} \propto 2\vec{A} - \vec{D}$, односно $F = (0 : 1) = B$. Из $f(A) = D$, $f(B) = E$, $f(C) = F$ добијамо матрицу пројективитета

$$M \propto \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

одакле следи $\vec{G} \propto M\vec{D} = (6, 4)$. Дакле, $G = (3/2 : 1)$, и коначно $(ABCG) = 3/2$. △

Пример 3.12. Нека је f пројективитет у $\mathbb{RP}^1$ и важи $A_{n+1} = f(A_n)$ за $n \geq 0$. Ако је $A_6 = A_0 \in \mathbb{RP}^1$, одредити дворазмеру $(A_1A_2A_4A_5)$ уколико она постоји.

Дворазмера $(A_1A_2A_4A_5)$ не мора да постоји, али ако постоји због инваријантности пројективитета постоје и дворазмере $(A_2A_3A_5A_0)$ и $(A_3A_4A_0A_1)$, те су тачке A_0, A_1, A_2, A_3 различите. Уведимо координатни систем тако да тачке $A_0 = (1 : 0)$, $A_1 = (0 : 1)$ и $A_2 = (1 : 1)$ постану базне, док је $A_3 = (a : 1)$ за неко $a \notin \{0, 1\}$. Пројективитет је индукован регуларном линеарном трансформацијом одакле је

$$\lambda \vec{A}_{n+1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \vec{A}_n.$$

За $n = 0$ из $(1 : 0) \mapsto (0 : 1)$ следи $m_{11} = 0$. За $n = 1$ из $(0 : 1) \mapsto (1 : 1)$ следи $m_{22} = m_{12}$. За $n = 2$ из $(1 : 1) \mapsto (a : 1)$ следи $a(m_{21} + m_{22}) = m_{11} + m_{12}$, одакле имамо $a(m_{21} + m_{12}) = m_{12}$, што нас доводи до матрице M пројективитета f која је облика

$$M \propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 - a & a \end{pmatrix}.$$

Даљим рачуном добијамо тачке A_4, A_5 и A_6 са

$$\vec{A}_4 \propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 - a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a(2 - a) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - a \end{pmatrix},$$

$$\vec{A}_5 \propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 - a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - a^2 \\ 1 + a - a^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{A}_6 \propto \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 - a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a - a^2 \\ 1 + a - a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1 + a - a^2) \\ a((1 - a)(2 - a) + 1 + a - a^2) \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 + a - a^2 \\ 3 - 2a \end{pmatrix}.$$

Из услова $A_6 = A_0 = (1 : 0)$, имамо $3 - 2a = 0$, односно $a = 3/2$, те следи

$$M \propto \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

То даје $A_3 = (3 : 2)$ и $A_4 = (2 : 1)$, те је $(A_1A_2A_4A_5) = (A_0A_1A_3A_4) = (2/3) : (1/2) = 4/3$.

Уколико услов $A_6 = A_0$ заменимо условом $A_5 = A_0$ добили бисмо $1 + a - a^2 = 0$, што доноси два решења облика $a = (1 \pm \sqrt{5})/2$. Тада је $A_3 = (1 \pm \sqrt{5} : 2)$ и $A_4 = (2 : 3 \mp \sqrt{5})$, те рачун за могуће дворазмере даје $(A_1A_2A_4A_5) = (1 \pm \sqrt{5})/2$. △

3.6 Фиксне тачке пројективитета

Под фиксним тачкама пројективитета подразумевамо оне тачке које су инваријантне у односу на тај пројективитет. Пројективитет аналитичке пројективне праве $\mathbb{RP}^1$ је по Теорему 3.15 индукован регуларном линеарном трансформацијом, те посматрамо пресликавање

$$\lambda \vec{X}' = A \vec{X},$$

где је A квадратна матрица реда два са елементима из $\mathbb{F}$. Тачка X је фиксна тачка ако је $X' = X$, односно ако за векторе представнике важи $\vec{X}' \propto \vec{X}$, што нас доводи до једначине

$$(A - \lambda \mathbb{1}) \vec{X} = 0.$$

Уколико је $A - \lambda \mathbb{1}$ регуларна матрица, множењем слева њеним инверзом добијамо јединствено решење $\vec{X} = 0$, које не представља тачку у $\mathbb{RP}^2$. Зато се фиксне тачке јављају само за сингуларне матрице $A - \lambda \mathbb{1}$, где знамо да решење није јединствено. Како је једначина хомогена, нула вектор јесте решење (иако не представља тачку), те постоји и нетривијално решење.

Полином $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ је карактеристични полином матрице A по променљивој λ , при чему је $A - \lambda \mathbb{1}$ сингуларно кад је λ нула карактеристичног полинома, односно сопствена вредност матрице A . Тада је свако решење $\vec{X} \neq 0$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ . Проблем налажења фиксних тачака еквивалентан је проблему налажења свих сопствених вектора матрице A , а у питању су вектори представници фиксних тачака.

Нека је $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, односно фокусирамо се на случај пројективитета реалне пројективне праве $\mathbb{RP}^1$. Из Леме А.1 можемо закључити да је сума сопствених потпростора директна, тако да је довољно испитати сваку сопствену вредност понаособ. Колика је димензија сопственог потпростора $\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})$ за неку конкретну сопствену вредност λ ? Она је барем један, јер за сваку (реалну) сопствену вредност постоје сопствени вектори. Са друге стране димензија може ићи највише до вишеструкости сопствене вредности. По ставу о рангу и дефекту из линеарне алгебре важи

$$\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) + \text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 2.$$

Ако је вишеструкост сопствене вредности λ један, тада је $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 1$, што повлачи постојање тачно једне фиксне тачке која јој одговара. Уколико је вишеструкост за λ једнака два, имамо $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) \in \{1, 2\}$. У случају димензије једнаке један постоји једна одговарајућа фиксна тачка, док у случају димензије једнаке два постоји бесконачно много одговарајућих фиксних тачака при чему су све оне колинеарне.

Матрица пројективитета је облика

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

те рачунамо карактеристични полином матрице A са

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \text{tr } A \cdot \lambda + \det A. \quad (3.9)$$

Сопствене вредности су нуле карактеристичног полинома, а њихов број зависи од дискриминанте добијене квадратне једначине $D = (\text{tr } A)^2 - 4 \det A$.

Уколико је $(\text{tr } A)^2 < 4 \det A$, имамо $D < 0$, те нема реалних сопствених вредности (постоје две конјуговано комплексне сопствене вредности). Зато нема реалних

сопствених вектора, те ни фиксних тачака, а за такав пројективитет кажемо да је **елиптички**.

Уколико је $(\operatorname{tr} A)^2 > 4 \det A$, имамо $D > 0$, те постоје две различите сопствене вредности. Како је свака од те две вредности једнострука, њима одговарају једнодимензиони сопствени потпростори, те постоје тачно две фиксне тачке, а за такав пројективитет кажемо да је **хиперболички**.

Уколико је $(\operatorname{tr} A)^2 = 4 \det A$, имамо $D = 0$, те постоји само једна сопствену вредност λ , али вишеструкости два. У случају $\operatorname{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ имамо $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 2$, све тачке су фиксне и у питању је идентичко пресликавање. У случају $\operatorname{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 1$ имамо $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 1$, те тачно једну фиксну тачку, а за такав пројективитет кажемо да је **параболички**.

Обједињавањем претходне дискусије видимо да број фиксних тачака пројективитета може бити 0 (елиптички), 1 (параболички), 2 (хиперболички) или бесконачно (идентички), а неке конкретне примере видимо у следећој табели.

пројективитет	фиксне тачке	пример
елиптички	0	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
параболички	1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
хиперболички	2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
идентички	∞	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пример 3.13. Дате су тачке пројективне праве $A(0 : 1)$, $B(1 : 1)$ и $C(2 : 1)$. Одредити све параболичке пројективитете који сликају $(A, B) \mapsto (A', B')$ тако да је $(ABCA') = 3$ и $(ABA'B') = 16/15$.

Из $\vec{C} = -\vec{A} + 2\vec{B}$ за $\vec{A}' = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ је $3 = (ABCA') = (2/-1) : (\beta/\alpha)$, те $\vec{A}' \propto -3\vec{A} + 2\vec{B}$, односно $A' = (2 : -1)$. За $\vec{B}' = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$ је $16/15 = (ABA'B') = (2/-3) : (\delta/\gamma)$, одакле следи $\vec{B}' \propto -8\vec{A} + 5\vec{B}$, односно $B' = (5 : -3)$.

Ако је M матрица пројективитета $\lambda X' = MX$ из $A \mapsto A'$ је $(m_{12}, m_{22}) \propto (2, -1)$, док $B \mapsto B'$ даје $(m_{11} + m_{12}, m_{21} + m_{22}) \propto (5, -3)$. Одавде добијамо једначине $m_{12} = -2m_{22}$ и $3(m_{11} + m_{12}) + 5(m_{21} + m_{22}) = 0$, из којих је $5m_{21} = m_{22} - 3m_{11}$. Пројективитет је параболички ако је дискриминанта карактеристичног полинома нула, односно ако је $(\operatorname{tr} M)^2 = 4 \det M$, што даје једначину $(m_{11} + m_{22})^2 = 4(m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21})$. Искористимо ли претходне једначине имамо $5m_{11}^2 + 10m_{11}m_{22} + 5m_{22}^2 = 20m_{11}m_{22} + 8m_{22}(m_{22} - 3m_{11})$, односно $5m_{11}^2 + 14m_{11}m_{22} - 3m_{22}^2 = (m_{11} + 3m_{12})(5m_{11} - m_{12}) = 0$, што даје два решења $m_{11} = -3m_{12}$ и $5m_{11} = m_{12}$. Коначно,

$$M \propto \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M \propto \begin{pmatrix} 5 & -50 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$$

су матрице два тражена пројективитета. △

Пример 3.14. Наћи фиксне тачке пројективитета $\lambda x'_1 = 2x_1 - x_2$, $\lambda x'_2 = x_1 + 4x_2$. Одредити формуле овог пројективитета у неком координатном систему у којем је фиксна тачка бесконачна.

Дат је пројективитет $\lambda \vec{X}' = A\vec{X}$ чија је матрица

$$A \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Карактеристични полином

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(4 - \lambda) + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

има само једну (двоструку) нулу $\lambda = 3$. Сопствене векторе $\vec{X}$ добијамо из

$$(A - 3\mathbb{1})\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

одакле је $x_2 = -x_1$ што даје $\vec{X} \propto (1, -1)$, и јединствену фиксну тачку $(1 : -1)$.

Промену координата представља матрица преласка M са старе на нову базу, при чему је веза између старих и нових координата дата са $\lambda \vec{X} = M \vec{X}_N$. Желимо да фиксна тачка $(1 : -1)$ постане бесконачна, односно $(1 : 0)$. Вектор $(1, 0)$ је први базни вектор и његови коефицијенти у старој бази су, рецимо, $(1, -1)$, те их уписујемо у прву колону матрице преласка. На овај начин испуњавамо услове задатка, док матрицу M комплетирамо другом колоном, тако што упишемо било шта што испуњава услов $\det M \neq 0$. На пример, нови координатни систем можемо задати матрицом преласка

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

За пројективитет $\lambda \vec{X}' = A \vec{X}$, у новим координатама имамо $\lambda M \vec{X}'_N = A M \vec{X}_N$, одакле је $\lambda \vec{X}'_N = (M^{-1} A M) \vec{X}_N$. Одговарајућа матрица пројективитета је

$$A_N \propto M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Промена координата даје пројективитет

$$\lambda \vec{X}'_N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{X}_N,$$

који очигледно фиксира тачку $(1 : 0)$. △

Пример 3.15. Наћи фиксне тачке пројективитета $\lambda x'_1 = 2x_1 + 3x_2$, $\lambda x'_2 = 3x_1 + 2x_2$. Одредити нови координатни систем у чијим је афиним координатама тај пројективитет хомотетија са центром у нули.

Дат је пројективитет $\lambda \vec{X}' = A \vec{X}$, чија је матрица

$$A \propto \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Карактеристични полином

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 3^2 = (\lambda + 1)(\lambda - 5)$$

има две једноструке нуле $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 5$. Сопствене векторе добијамо из једначине $(A - \lambda_i \mathbb{1})\vec{X} = 0$, а како знамо да су сопствени потпростори димензије један имамо $\text{Ker}(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = \text{Span}\{(-1, 1)\}$ и $\text{Ker}(A - \lambda_2 \mathbb{1}) = \text{Span}\{(1, 1)\}$, одакле добијамо две фиксне тачке $(-1 : 1)$ и $(1 : 1)$.

Пројективитет је хомотетија ако фиксира бесконачну тачку и центар, дакле фиксне тачке у новом координатном систему морају бити $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$. Желимо да пресликамо тачке $(-1 : 1)$ и $(1 : 1)$ у $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$, не нужно у том редоследу. Тачка којој одговара вектор представник уписан у прву колону матрице преласка

прелази у $(1 : 0)$, док тачка којој одговара вектор представник уписан у другу колону матрице преласка прелази у $(0 : 1)$. Зато постоји бесконачно много решења, а једно од једноставнијих је матрица преласка

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ за коју је } M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Друга решења могу се добити тако што другу колону матрице M помножимо произвољним ненула скаларом.

Пројективитет $\lambda \vec{X}' = A\vec{X}$, у новим координатама постаје $\lambda \vec{X}'_N = (M^{-1}AM)\vec{X}_N$, те добијамо одговарајућу матрицу пројективитета,

$$A_N \propto M^{-1}AM = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ова промена координата даје пресликавање

$$\lambda \vec{X}'_N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{X}_N,$$

које очигледно фиксира тачке $(1 : 0)$ и $(0 : 1)$, те је у питању хомотетија са коефицијентом $-1/5$. $\triangle$

Пример 3.16. Ако пројективитет у $\mathbb{RP}^1$ слика различите тачке A, B, C , редом у B, C, A , онда он мора бити елиптички. Ово тврђење се може доказати увођењем координатног система у којем су дате тачке базне, након чега се израчуна конкретна матрица пројективитета, а онда провери да она има само комплексне сопствене вредности. Алтернативно, ако би X била фиксна тачка, због инваријантности дворазмере у односу на пројективитет имамо $(XABC) = (XBAC) = (XCBA)$, те су $(XABC)$, $(XBAC) = (XBAC)^{-1}$ и $(XCAB) = (XCBA)^{-1}$. По Примеру 3.9 од ове три дворазмере тачно је једна негативна, што је немогуће. Зато пројективитет нема фиксних тачака и јесте елиптички. $\triangle$

3.7 Инволуције

Под **инволуцијом** подразумевамо пресликавање које је само себи инверз. Размотримо инволутивне пројективитете, односно пројективитете у $\mathbb{RP}^1$ са овом особином. Ако је

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

матрица инволутивног пројективитета, тада је $A \cdot A \propto \mathbb{1}$, односно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \propto \lambda \mathbb{1} = A^2 = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} & a_{12}a_{21} + a_{22}^2 \end{pmatrix},$$

одакле добијамо услове $a_{11}^2 + a_{12}a_{21} = a_{12}a_{21} + a_{22}^2$, $a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} = 0$, $a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22}$, који се лепше могу написати са $a_{11}^2 = a_{22}^2$, $a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0$, $a_{21}(a_{11} + a_{22}) = 0$. Услов $a_{11} = a_{22} \neq 0$ повлачи $a_{12} = a_{21} = 0$, те имамо идентичко пресликавање $A \propto \mathbb{1}$. У супротном је $a_{11} + a_{22} = 0$, односно $\text{tr } A = 0$, што оправдава све три једнакости.

Теорема 3.23. Неидентички инволутивни пројективитети у $\mathbb{RP}^1$ има матрицу траја нула.

Из формуле (3.9) је $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \cdot \lambda + \det A = \lambda^2 + \det A$, те карактеристични полином има дискриминанту $D = -4 \det A \neq 0$, што значи да не постоји параболички инволутивни пројективитет. Инволутивне пројективитете зато можемо поделити на елиптичке код којих је $\det A > 0$ и хиперболичке за које је $\det A < 0$, што записујемо у наредној лемми.

Лема 3.24. *Инволутивни пројективитет са матрицом A је елиптички за $\det A > 0$, а хиперболички за $\det A < 0$.*

Да би пројективитет био инволуција довољно је да има један пар инволутивних тачака. Наиме, ако је A матрица пројективитета који размењује тачке P и Q , тада је $A\vec{P} = \mu\vec{Q}$ и $A\vec{Q} = \nu\vec{P}$ за неке $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, што значи да су $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ сопствени вектори матрице A^2 за исту сопствену вредност $\mu\nu$, те припадају истом сопственом потпростору, што је због $P \neq Q$ читав простор одакле следи $A^2 \propto \mathbb{1}$.

Лема 3.25. *Ако пројективитет у $\mathbb{RP}^1$ размењује две различите тачке онда је он инволуција.*

Ако за пројективитет важи $(X, Y, P, Q) \mapsto (X, Y, Q, P)$, тада по Теорему 3.19 имамо $(XYPQ) = (XYQP)$, те је по Теорему 3.20 $(XYPQ)^2 = (XYPQ)(XYQP) = 1$, одакле следи $(XYPQ) = -1$, што даје хармонијску четворку $\mathcal{H}(XY; PQ)$.

Лема 3.26. *Фиксне тачке хиперболичког инволутивног пројективитета су хармонијски сјрећује са сваком паром одговарајућих тачака.*

Инволутивни пројективитет једнозначно је одређен са два пара инволутивних тачака. Наиме, по Лемми 3.25 један пар инволутивних тачака даје инволуцију, при чему већ имамо довољно тачака да по Основној теорему пројективитета одреде пројективитет.

Пример 3.17. Одредимо формуле и фиксне тачке инволутивног пројективитета задатог са два пара одговарајућих тачака: $A(1 : 2)$, $A'(1 : 0)$ и $B(2 : 3)$, $B'(8 : 1)$. Из $A \mapsto A'$ имамо $\lambda_1 = a_{11} + 2a_{12}$, $0 = a_{21} + 2a_{22}$, односно $a_{21} = -2a_{22}$. Из $A' \mapsto A$ имамо $\lambda_2 = a_{11}$, $2\lambda_2 = a_{21}$, односно $a_{21} = 2a_{11}$. Из $B \mapsto B'$ имамо $8\lambda_3 = 2a_{11} + 3a_{12}$, $\lambda_3 = 2a_{21} + 3a_{22}$, одакле је $8(2a_{21} + 3a_{22}) = 2a_{11} + 3a_{12}$. Прве две једначине дају $a_{21} = 2a_{11}$ и $a_{22} = -a_{11}$, што заменом у трећу даје $a_{12} = 2a_{11}$, те су тражене формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Карактеристични полином је $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2 \cdot 2 = \lambda^2 - 5$, што даје сопствене вредности $\lambda_1 = \sqrt{5}$ и $\lambda_2 = -\sqrt{5}$. Одговарајући сопствени вектори представљају фиксне тачке $(1 + \sqrt{5} : 2)$ и $(1 - \sqrt{5} : 2)$. $\triangle$

Пример 3.18. Мора ли композиција два инволутивна пројективитета бити инволутивни пројективитет? Не, јер по Теорему 3.23, неидентички инволутивни пројективитет има матрицу трага нула, те како је

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

то имамо производ две инволуције који није инволуција.

Може ли композиција елиптичког и хиперболичког инволутивног пројективитета бити елиптички инволутивни пројективитет? Не, јер ако је E матрица елиптичког, а H матрица хиперболичког инволутивног пројективитета, то по Лемми 3.24 важи $\det E > 0$ и $\det H < 0$, те је $\det(EH) = \det E \cdot \det H < 0$.

Може ли композиција елиптичког и хиперболичког инволутивног пројективитета бити хиперболички инволутивни пројективитет? Да, конкретан пример

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

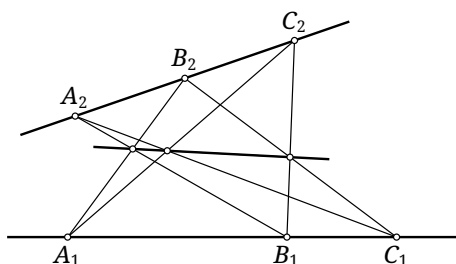
испуњава тражене услове.

△

3.8 Папосово тврђење

Размотримо поново синтетички засновану пројективну раван. Посматрајмо наредно тврђење које је у еуклидској геометрији открио Папос [43] и познато је као Папосова теорема.

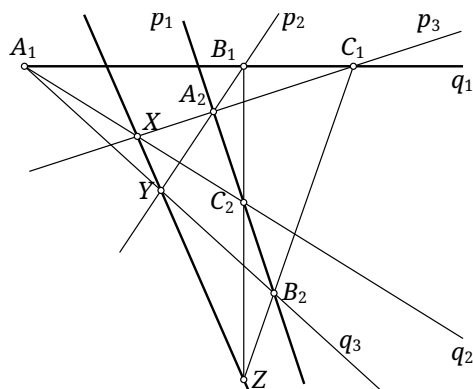
Тврђење 3.27 (Папосово тврђење). Нека су p_1 и p_2 различите праве и нека су A_1, B_1, C_1 различите тачке инцидентне са p_1 , а A_2, B_2, C_2 различите тачке инцидентне са p_2 , иако да се све тачке разликују од $p_1 \wedge p_2$. Тада су сецишћа $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке.



Три пресечне тачке из Папосовог тврђења су заправо сецишта наспрамних страна простог шестотеменика $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$. Праву коју оне одређују називамо **Папосова права**, а у општем случају она не пролази кроз $p_1 \wedge p_2$.

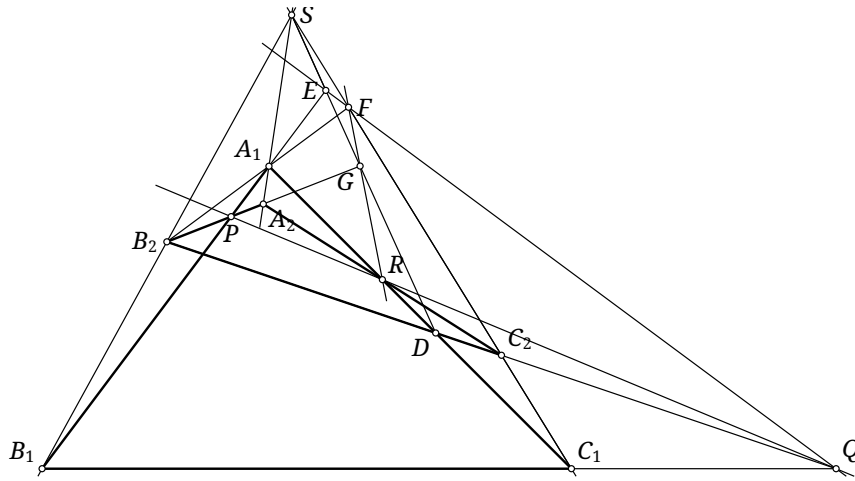
Папосова раван је пројективна раван у којој важи Папосово тврђење. Конфигурација Папосовог тврђења састоји се од девет тачака и девет правих, при чему свака права садржи три тачке, док се у свакој тачки секу три праве. Свака права те конфигурације може се узети за Папосову праву на којој леже три тачке, док преосталих шест тачака леже по три на две праве конфигурације. Папосово тврђење повлачи сопствени дуал, тако да има места за следећу теорему.

Теорема 3.28. У Папосовој равни важи Принцип дуалности.



Доказ. Нека су A_1 и A_2 различите тачке, те $p_1, p_2, p_3 \in (A_2)$ и $q_1, q_2, q_3 \in (A_1)$ тако да се међу њима не налази $A_1 \vee A_2$. Дефинишимо тачке $B_1 = p_2 \wedge q_1$, $B_2 = p_1 \wedge q_3$, $C_1 = p_3 \wedge q_1$ и $C_2 = p_1 \wedge q_2$. Тачке $A_1, B_1, C_1 \in (q_1)$ и $A_2, B_2, C_2 \in (p_1)$ испуњавају услове Папосовог тврђења и зато су $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1) = q_3 \wedge p_2$, $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1) = p_3 \wedge q_2$ и $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ колинеарне. Одавде видимо да су праве $(q_3 \wedge p_2) \vee (p_3 \wedge q_2)$, $B_1 \vee C_2 = (p_2 \wedge q_1) \vee (p_1 \wedge q_2)$ и $B_2 \vee C_1 = (p_1 \wedge q_3) \vee (p_3 \wedge q_1)$ конкурентне и зато важи тврђење дуално Папосовом. $\square$

Испоставља се да је Папосово тврђење јаче од Дезарговог, што је резултат који је 1905. поставио Хесенберг⁵ [39]. Нека су $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ тротеменици у Папосовој равни који су перспективни у односу на центар S . Потребно је доказати да су тачке $P = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, $Q = (B_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$ и $R = (A_1 \vee C_1) \wedge (A_2 \vee C_2)$ колинеарне.

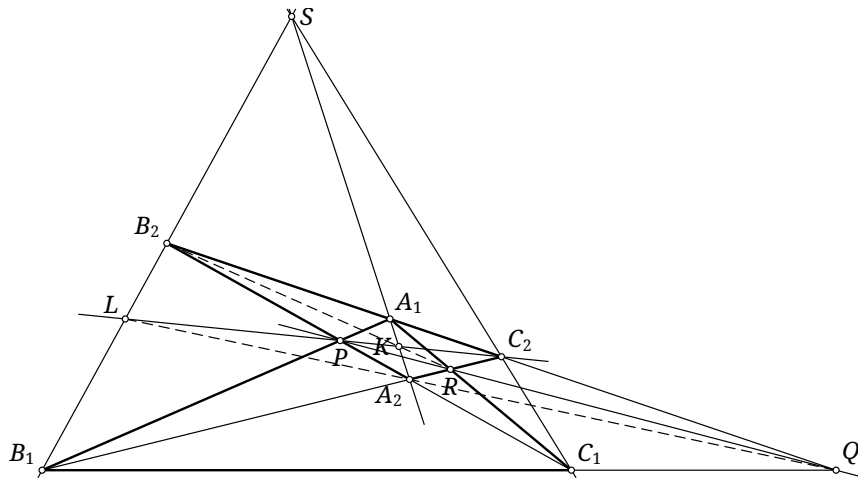


Нека је $D = (A_1 \vee C_1) \wedge (B_2 \vee C_2)$. Применимо Папосово тврђење на тројке S, B_1, B_2 и A_1, D, C_1 , одакле су тачке $E = (S \vee D) \wedge (A_1 \vee B_1)$, Q и $F = (B_2 \vee A_1) \wedge (C_1 \vee S)$ колинеарне. Нова примена Папосовог тврђења на тројке S, A_1, A_2 и B_2, C_2, D каже да су колинеарне тачке F, R и $G = (A_2 \vee B_2) \wedge (D \vee S)$. Трећа примена Папосовог тврђења, овога пута на тројке A_1, B_2, F и G, E, D даје колинеарне тачке $P, Q = (B_2 \vee D) \wedge (E \vee F)$ (из прве примене) и $R = (A_1 \vee D) \wedge (F \vee G)$ (из друге примене), што је оса перспективе наших тротеменика.

Оригинални аргумент који смо навели садржи пропуст који је примећен пола века касније, када је Кронхајм⁶ [21] комплетирао ову причу. Наиме, проблем настаје када не можемо да применимо Папосово тврђење јер је једна од тачака управо сециште двеју правих са којих узимамо тачке. Конкретно, прва примена Папосовог тврђења није могућа уколико је тачка D на правој $S \vee B_1$, што је даље еквивалентно томе да је $D = B_2$, односно да су A_1, B_2, C_1 колинеарне. Друга примена Папосовог тврђења није могућа уколико је тачка D на правој $S \vee A_1$, што је даље еквивалентно томе да је $D = A_1$, односно да су A_1, B_2, C_2 колинеарне. Зато Хесенбергов аргумент пролази уколико истовремено имамо неколинеарне A_1, B_2, C_1 и неколинеарне A_1, B_2, C_2 , или те неколинеарности у некој пермутацији тачака.

⁵Gerhard Hessenberg (1874–1925), немачки математичар

⁶Arno Cronheim (1922–2005), немачко-амерички математичар

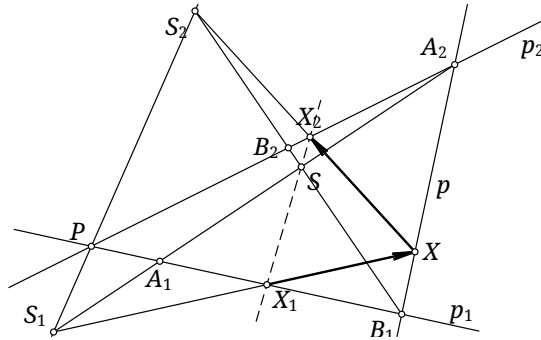


Међутим, преостаје случај када су колинеарне A_1, B_2, C_2 , колинеарне B_1, A_2, C_2 и колинеарне C_1, A_2, B_2 (или у пермутацији колинеарне A_2, B_1, C_1 , колинеарне B_2, A_1, C_1 и колинеарне C_2, A_1, B_1) што се не може добити као пермутација претходног случаја. Тада уводимо тачке $K = (S \vee A_1) \wedge (P \vee C_2)$ и $L = (S \vee B_1) \wedge (P \vee C_2)$. Примена Папосовог тврђења на тројке S, C_1, C_2 и P, B_1, A_1 даје колинеарне B_2, K, R , док примена Папосовог тврђења на тројке S, C_1, C_2 и P, A_1, B_1 даје колинеарне A_2, L, Q . Коначно, примена Папосовог тврђења на тројке K, A_1, A_2 и B_1, L, B_2 даје колинеарне P, R, Q .

Теорема 3.29 (Хесенбергова теорема). Папосова раван је Дезаргова раван.

Даље се природно поставља питање под којим условима је неки пројективитет $f: (p_1) \bar{\wedge} (p_2)$, за $p_1 \neq p_2$, заправо перспективитет. Како сваки перспективитет $(p_1) \bar{\wedge} (p_2)$ фиксира заједнички елемент $P = p_1 \wedge p_2$ имамо потребан услов. Да ли је услов $f(P) = P$ и довољан?

Ако истраживање вршимо у Папосовој равни, по Хесенберговој теорему (Теорема 3.29) она је Дезаргова и можемо искористити Теорему 3.12 по којој је сваки пројективитет облика $f = (p_1) \bar{\wedge} (p) \bar{\wedge} (p_2)$. Уколико су p_1, p, p_2 конкурентне, то је f перспективитет (Лема 3.10). Претпоставимо зато $P \notin (p)$, те постоје сецишта $B_1 = p_1 \wedge p$ и $A_2 = p \wedge p_2$ различита од P .



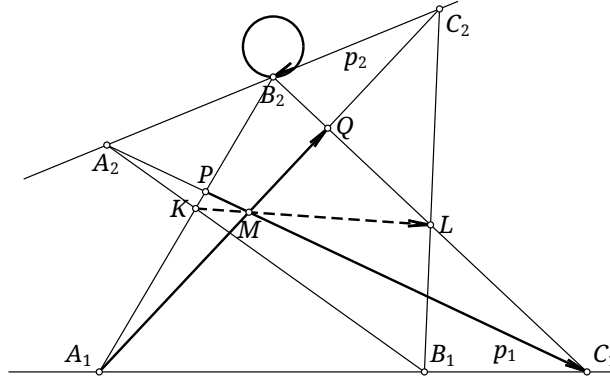
Нека су даље $B_2 = (B_1 \vee S_2) \wedge p_2$ и $A_1 = (A_2 \vee S_1) \wedge p_1$, односно такве да важи $f(A_1) = A_2$ и $f(B_1) = B_2$. Ако је f перспективитет $S = (A_1 \vee A_2) \wedge (B_1 \vee B_2)$ би морао бити његов центар. За произвољну тачку $X_1 \in (p_1)$ је $X = f_1(X_1) \in (p)$ и $X_2 = f_2(X) = f(X_1) \in (p_2)$. Из претпоставке $f(P) = P$ директно следи колинеарност тачака S_1, P, S_2 , док примена Папосовог тврђења на тројке S_1, P, S_2 и $B_1, X, A_2 \in (p)$ даје колинеарне тачке X_1, X_2, S . Одавде свака спојница $X_1 \vee X_2$ пролази кроз S , односно S је центар и f јесте перспективитет. Самим тим у Папосовој равни важи следеће тврђење.

Тврђење 3.30 (Тврђење о перспективитету). Пројективитет између два различита низа тачака је перспективитет ако и само ако фиксира заједнички елемент.

Испоставља се да важи и обрат, односно Папосово тврђење и Тврђење о перспективитету су еквивалентна.

Лема 3.31. *Тврђења 3.27 и 3.30 су еквивалентна.*

Доказ. Преостаје нам да покажемо да Тврђење 3.30 повлачи Тврђење 3.27. Нека су p_1 и p_2 различите праве и нека су A_1, B_1, C_1 различите тачке инцидентне са p_1 , а A_2, B_2, C_2 различите тачке инцидентне са p_2 , тако да су све поменуте тачке различите од $p_1 \wedge p_2$. Сада је потребно доказати да су тачке $K = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $L = (B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $M = (C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне.



Уведимо тачке $P = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee C_1)$ и $Q = (C_1 \vee B_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$, те поставимо пројективитет са $f = (A_1 \vee B_2) \bar{\wedge} (A_2) \stackrel{p_1}{\wedge} (C_2) \bar{\wedge} (C_1 \vee B_2)$ за који важи

$$(A_1, K, P, B_2) \mapsto (A_1 \vee A_2, B_1 \vee A_2, C_1 \vee A_2, p_2) \mapsto (A_1 \vee C_2, B_1 \vee C_2, C_1 \vee C_2, p_2) \mapsto (Q, L, C_1, B_2).$$

Како f фиксира заједнички елемент B_2 , он је перспективитет (Тврђење 3.30) и постоји центар S тако да је $f = (A_1 \vee B_2) \stackrel{S}{\wedge} (C_1 \vee B_2)$. Одавде су праве $A_1 \vee Q$, $K \vee L$ и $P \vee C_1$ конкурентне у S , те због $A_1 \vee Q = A_1 \vee C_2$ и $P \vee C_1 = A_2 \vee C_1$, следи $S = M$ и тачке K, L, M су колинеарне. $\square$

По Теорему 3.9 постоји пројективитет f који слика $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, где су A_1, B_1, C_1 колинеарне тачке праве p_1 , а A_2, B_2, C_2 колинеарне тачке праве $p_2 \neq p_1$. Природно се поставља питање да ли је такав пројективитет једнозначно одређен. Теорема 3.12 дозвољава да пројективитет f раставимо са $f = (p_1) \stackrel{S_1}{\wedge} (p) \stackrel{S_2}{\wedge} (p_2)$, при чему праву p можемо разноврсно бирати (Лема 3.11), на пример са $p = A_1 \vee B_2$ (уколико је $A_1 \neq p_1 \wedge p_2 \neq B_2$). Ако је g пројективитет који слика $(A_1, B_1, C_1) \mapsto (A_2, B_2, C_2)$, тада можемо посматрати пројективитет $h = (p_1) \stackrel{g}{\wedge} (p_2) \stackrel{S_2}{\wedge} (p)$ и перспективитет $(p_1) \stackrel{S_1}{\wedge} (p)$ који једнако сликају тројку (A_1, B_1, C_1) . Међутим, ту је фиксиран заједнички елемент $p_1 \wedge p = A_1$, те је h перспективитет по Тврђењу 3.30. Центар перспективитета мора бити $(B_1 \vee h(B_1)) \wedge (C_1 \vee h(C_1)) = S_1$, одакле следи једнозначно $g = f$. Овако смо показали да у Папосовој равни важи следеће тврђење.

Тврђење 3.32 (Основно тврђење пројективитета). *Постоји јединствен пројективитет који различите колинеарне тачке A_1, B_1, C_1 пресликава редом у различите колинеарне тачке A_2, B_2, C_2 .*

Основно тврђење пројективитета је појачање Теореме 3.9 која нам је гарантовала егзистенцију пројективитета, док сада на располагању имамо и јединственост. Испоставља се да важи и обрат, односно ако важи Основно тврђење пројективитета тада се налазимо у Папосовој равни.

Теорема 3.33. *Папосово тврђење, Тврђење о перспективитету и Основно тврђење пројективитета (Тврђења 3.27, 3.30 и 3.32) су еквивалентна у пројективној равни.*

Доказ. Преостало је доказати да Тврђење 3.32 повлачи Тврђење 3.30. Перспективитет свакако фиксира заједнички елемент. Нека је сада $f: (p) \bar{\wedge} (q)$ пројективитет који фиксира заједнички елемент $P = p \wedge q$, односно важи $f(P) = P$. Нека су A и B тачке са p различите од P , те $A' = f(A)$ и $B' = f(B)$ њихове слике. Перспективитет $g: (p) \underline{\wedge} (q)$ за $S = (A \vee A') \wedge (B \vee B')$ очигледно слика $(P, A, B) \xrightarrow{g} (P, A', B')$, а како то ради и f , по Тврђењу 3.32 имамо $f = g$, те је f перспективитет. $\square$

Доказали смо да су Папосово тврђење, Тврђење о перспективитету и Основно тврђење пројективитета међусобно еквивалентна у пројективној равни. Међутим, њих не можемо доказати у пројективној равни јер Папосово тврђење повлачи Дезаргово (Теорема 3.29), а знамо да оно у општем случају не важи (Молтонова раван). Због тога неко од тврђења узимамо као аксиому, на пример Папосово.

Аксиома 3.1 (Папосова теорема). Важи Папосово тврђење (Тврђење 3.27).

Напоменимо да уколико за аксиому узмемо Основно тврђење пројективитета, уз много мање муке можемо извести Папосово тврђење и поново имати целу теорију на располагању. Конкретно, довољно нам је само оно што смо записали у доказима Леме 3.31 и Теореме 3.33, док нам Леме 3.10 и 3.11 нису неопходне.

Увођењем Аксиоме 3.1 заправо радимо у Папосовој равни, а три еквивалентна тврђења из Теореме 3.33 добијају статус теореме. Тако можемо говорити о Папосовој теорему, Теорему о перспективитету, Основној теорему пројективитета, а наравно последично (Теорема 3.29) и о Дезарговој теорему. По Теорему 3.28 у Папосовој равни важи Принцип дуалности, тако да одмах добијамо дуале наших теорема. У оригиналним теоремама пројективитет је успостављен између низова тачака, а у дуалним, између праменова правих. Како суштина остаје иста за теорему и њен дуал природно ћемо задржати име теореме.

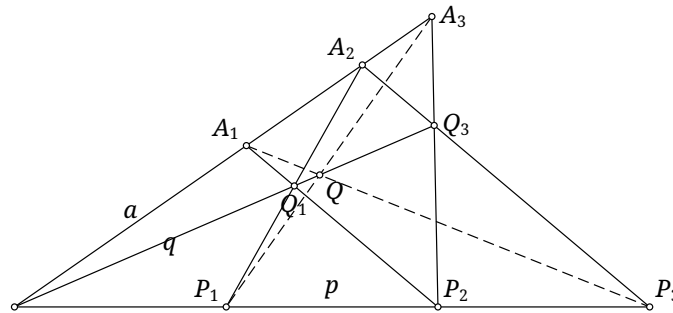
Теорема 3.34 (Теорема о перспективитету). Пројективитет (између низова или праменова) је перспективитет ако и само ако фиксира заједнички елемент.

Теорема 3.35 (Основна теорема пројективитета). Пројективитет је једнозначно одређен са три одговарајућа пара елемената.

Што се тиче аналитичке пројективне равни $\mathbb{P}^2$, раније смо из Теореме 3.17 и Теореме 3.18 констатовали да важи Основна теорема пројективитета, те самим тим важи и Папосова теорема. Дакле, аналитичка раван испуњава Аксиоме 2.1, 2.2, 2.3 и 3.1.

Теорема 3.36. Аналићка пројективна раван $\mathbb{P}^2$ је Папосова раван.

Пример 3.19. У Папосовој равни дате су различите конкурентне праве a, p, q и тачке $A_1, A_2, A_3 \in (a) \setminus \{p \wedge q\}$. Ако је $f_i: (p) \bar{\wedge}^{A_i} (q)$ за $i = 1, 2, 3$, доказати $f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3 = f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1$.

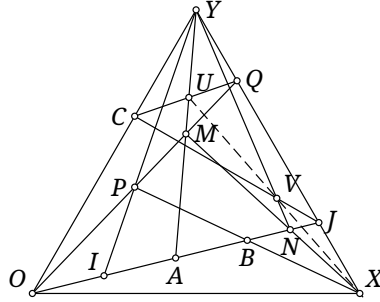


За $P_2 \in (p) \setminus \{p \wedge a\}$, нека је $Q_1 = f_1(P_2)$ и $Q_3 = f_3(P_2)$, те $P_1 = f_2^{-1}(Q_1)$ и $P_3 = f_2^{-1}(Q_3)$. Примена Папосове теореме на $A_1, A_2, A_3 \in (a)$ и $P_1, P_2, P_3 \in (p)$ даје колинеарне тачке $A_1 P_2 \wedge A_2 P_1 = Q_1$, $A_2 P_3 \wedge A_3 P_2 = Q_3$ и $A_1 P_3 \wedge A_3 P_1 = Q$, одакле следи $Q \in (q)$ због $q = Q_1 \vee Q_3$. Имамо $(f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_3)(P_2) = f_1(P_3) = P_3 A_1 \wedge q = Q$ и $(f_3 \circ f_2^{-1} \circ f_1)(P_2) = f_3(P_1) = P_1 A_3 \wedge q = Q$. $\triangle$

3.9 Координатизација Дезаргове равни *

Уколико на располагању имамо Дезаргову теорему, многе ствари у координатизацији описаној у Секцији 2.5 долазе на своје место. Желимо да испитамо алгебарску структуру $(\mathbb{K}, T)$ у случају Дезаргове равни, те најпре показујемо да је одговарајући тернарни прстен линеаран. Постављамо различите тачке $A(a, a)$, $B(b, b)$ и $C(0, c)$, те конструишемо

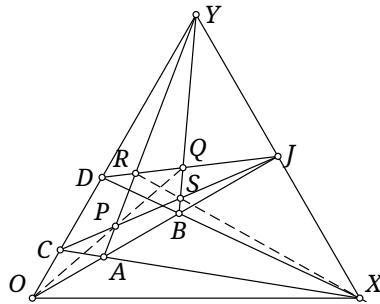
$$\begin{aligned} P(1, b) &= (X \vee B) \wedge (Y \vee I), & Q(b) &= (O \vee P) \wedge (X \vee Y), \\ U(a, T(a, b, c)) &= (C \vee Q) \wedge (A \vee Y), & M(a, a \cdot b) &= (O \vee Q) \wedge (A \vee Y), \\ N(a \cdot b, a \cdot b + c) &= (X \vee M) \wedge (O \vee I), & V(a \cdot b, a \cdot b + c) &= (N \vee Y) \wedge (C \vee J). \end{aligned}$$



Тротеменици CQJ и YMN су перспективни у односу на центар O , те имају осу коју чине $(C \vee Q) \wedge (Y \vee M) = U$, $(C \vee J) \wedge (Y \vee N) = V$, $(Q \vee J) \wedge (M \vee N) = X$. Како су X , $U(a, T(a, b, c))$ и $V(a \cdot b, a \cdot b + c)$ колинеарне то је $T(a, b, c) = a \cdot b + c$, односно T је линеарно. Линеарност тернарног прстена омогућава нам да избегнемо тернарну операцију T и да говоримо само о структури $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ јер имамо једнозначно одређено $T(a, b, c) = a \cdot b + c$.

Сабирање је комутативно, односно у $\mathbb{K}$ важи $a + b = b + a$. Постављамо различите тачке $A(a, a)$ и $B(b, b)$, те конструишемо

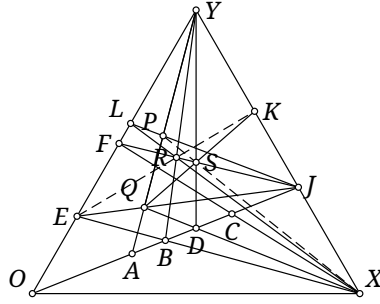
$$C(0, a) = (X \vee A) \wedge (O \vee Y), \quad D(0, b) = (X \vee B) \wedge (O \vee Y).$$



Тротеменици ABY и CDJ су перспективни у односу на центар X , те имају осу коју чине тачке $O = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$, $P(a, a + a) = (A \vee Y) \wedge (C \vee J)$ и $Q(b, b + b) = (B \vee Y) \wedge (D \vee J)$. Због колинеарности тачака O, P, Q , тротеменици YJP и DBQ су перспективни у односу на центар O , те имају осу коју чине тачке $X = (Y \vee J) \wedge (D \vee B)$, $R(a, a + b) = (Y \vee P) \wedge (D \vee Q)$, $S(b, b + a) = (J \vee P) \wedge (B \vee Q)$. Како су $X, R(a, a + b)$ и $S(b, b + a)$ колинеарне то је $a + b = b + a$, што доказује комутативност сабирања.

Сабирање је асоцијативно, односно у $\mathbb{K}$ важи $(a + b) + c = a + (b + c)$. Постављамо различите тачке $A(a, a)$, $B(b, b)$ и $C(c, c)$ које су различите од O , те конструишемо

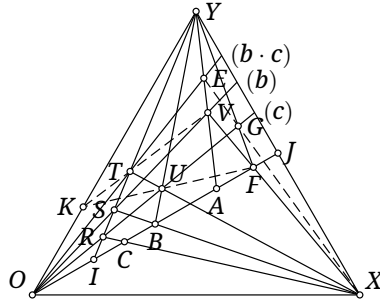
$$\begin{aligned} E(0, b) &= (X \vee B) \wedge (O \vee Y), & F(0, c) &= (X \vee C) \wedge (O \vee Y), \\ Q(a, a + b) &= (E \vee J) \wedge (A \vee Y), & D(a + b, a + b) &= (Q \vee X) \wedge (O \vee J), \\ S(a + b, (a + b) + c) &= (F \vee J) \wedge (D \vee Y). \end{aligned}$$



Тротеменици BXY и JQS су перспективни у односу на центар D , те имају осу коју чине тачке $E = (B \vee X) \wedge (J \vee Q)$, $R(b, b + c) = (B \vee Y) \wedge (J \vee S)$, $K = (X \vee Y) \wedge (Q \vee S)$. За $L(0, b + c) = (R \vee X) \wedge (O \vee Y)$, због колинеарности E, R, K , тротеменици LJR и YQK су перспективни у односу на центар E , те имају осу коју чине $P(a, a + (b + c)) = (L \vee J) \wedge (Y \vee Q)$, $X = (L \vee R) \wedge (Y \vee K)$, $S = (J \vee R) \wedge (Q \vee K)$. Како су тачке $X, S(a + b, (a + b) + c)$ и $P(a, a + (b + c))$ колинеарне, то добијамо $(a + b) + c = a + (b + c)$, што доказује асоцијативност сабирања.

Овим смо показали да се сабирање лепо понаша у Дезарговој равни, односно да је $(\mathbb{K}, +)$ једна комутативна група, те испитујемо понашање множења. Множење је асоцијативно, односно у $\mathbb{K}$ важи $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Постављамо различите тачке $A(a, a)$, $B(b, b)$ и $C(c, c)$ које су различите од O и I , те конструишемо

$$\begin{aligned} R(1, c) &= (X \vee C) \wedge (Y \vee I), & S(1, b) &= (X \vee B) \wedge (Y \vee I), \\ U(b, b \cdot c) &= (O \vee R) \wedge (B \vee Y), & T(1, b \cdot c) &= (X \vee U) \wedge (Y \vee I) \\ E(a, a \cdot (b \cdot c)) &= (O \vee T) \wedge (A \vee Y), & V(a, a \cdot b) &= (O \vee S) \wedge (A \vee Y) \\ F(a \cdot b, a \cdot b) &= (V \vee X) \wedge (O \vee J). \end{aligned}$$



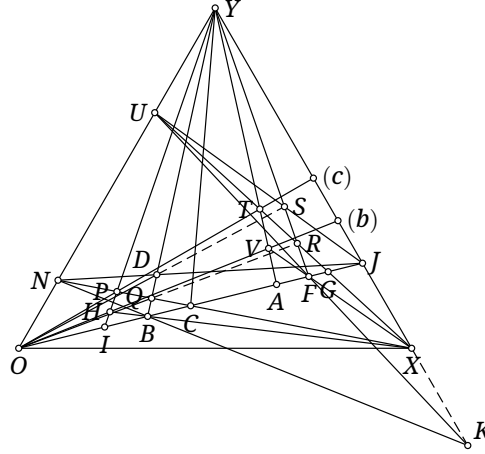
Тротеменици BUF и STV су перспективни у односу на центар X , те имају осу коју чине тачке $Y = (B \vee U) \wedge (S \vee T)$, $O = (B \vee F) \wedge (S \vee V)$, $K = (U \vee F) \wedge (T \vee V)$. Из колинеарности Y, O, K , тротеменици OTU и YVF су перспективни у односу на центар K , те имају осу коју чине $E = (O \vee T) \wedge (Y \vee V)$, $X = (T \vee U) \wedge (V \vee F)$, $G(a \cdot b, (a \cdot b) \cdot c) = (O \vee U) \wedge (Y \vee F)$. Како су тачке $X, E(a, a \cdot (b \cdot c))$ и $G(a \cdot b, (a \cdot b) \cdot c)$ колинеарне, то добијамо $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, што доказује асоцијативност множења.

Овим смо показали да се и множење лепо понаша у Дезарговој равни, односно да је $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ група. Из асоцијативности множења следи да су леви и десни инверзи за множење једнаки, што можемо даље користити. Преостаје да повежемо сабирање и множење кроз дистрибутивне законе.

Постављамо различите тачке $A(a, a)$, $B(b, b)$ и $C(c, c)$ које су различите од O и I , те конструишемо

$$\begin{aligned} Q(b, c) &= (X \vee C) \wedge (B \vee Y), & N(0, c) &= (X \vee C) \wedge (O \vee Y) \\ H(1, b) &= (X \vee B) \wedge (Y \vee I), & P(1, c) &= (X \vee C) \wedge (Y \vee I) \\ V(a, a \cdot b) &= (A \vee Y) \wedge (O \vee H), & F(a \cdot b, a \cdot b) &= (V \vee X) \wedge (O \vee I) \\ T(a, a \cdot c) &= (A \vee Y) \wedge (O \vee P), & U(0, a \cdot c) &= (X \vee T) \wedge (O \vee Y) \end{aligned}$$

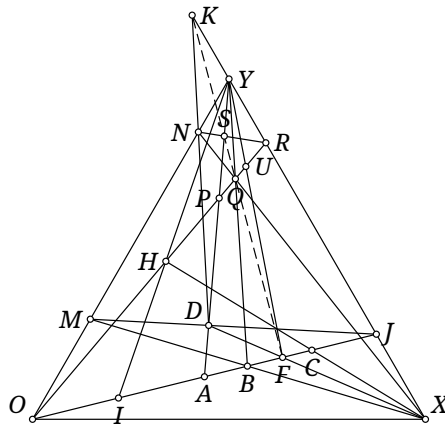
Након тога уводимо $R = (F \vee Y) \wedge (O \vee Q) = [a \cdot b] \wedge [b^{-1} \cdot c, 0] = (a \cdot b, a \cdot c)$, одакле су X, U, R колинеарне. Тротеменици NQB и URF су перспективни у односу на центар O , те имају осу коју чине $X = (N \vee Q) \wedge (U \vee R)$, $K = (N \vee B) \wedge (U \vee F)$, $Y = (Q \vee B) \wedge (R \vee F)$. Колинеарност X, K, Y даје тротеменике NJU и BYF који су перспективни у односу на центар K , те имају осу коју чине $D(b, b + c) = (N \vee J) \wedge (B \vee Y)$, $O = (N \vee U) \wedge (B \vee F)$, $S = (J \vee U) \wedge (Y \vee F)$. Одавде су праве $D \vee O = [b^{-1} \cdot (b + c), 0]$, $J \vee U = [1, a \cdot c]$, $Y \vee F = [a \cdot b]$ конкурентне у S . Са једне стране имамо $S = (J \vee U) \wedge (Y \vee F) = [1, a \cdot c] \wedge [a \cdot b] = (a \cdot b, a \cdot b + a \cdot c)$, док са друге стране имамо $S = (D \vee O) \wedge (Y \vee F) = [b^{-1} \cdot (b + c), 0] \wedge [a \cdot b] = (a \cdot b, a \cdot (b + c))$, одакле добијемо $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, што доказује десну дистрибутивност.



Постављамо различите тачке $A(a, a)$, $B(b, b)$ и $C(c, c)$ које су различите од O и I , те конструишемо

$$\begin{aligned} M(0, b) &= (X \vee B) \wedge (O \vee Y), & D(a, a + b) &= (A \vee Y) \wedge (M \vee J) \\ H(1, c) &= (X \vee C) \wedge (Y \vee I), & P(a, a \cdot c) &= (A \vee Y) \wedge (O \vee H) \\ Q(b, b \cdot c) &= (B \vee Y) \wedge (O \vee H), & N(0, b \cdot c) &= (X \vee Q) \wedge (O \vee Y) \\ R(c) &= (X \vee Y) \wedge (O \vee H), \end{aligned}$$

Тротеменици JYB и DNX су перспективни у односу на центар M , те имају осу коју чине $K = (J \vee Y) \wedge (D \vee N)$, $F(a + b, a + b) = (J \vee B) \wedge (D \vee X)$, $Q = (Y \vee B) \wedge (N \vee X)$. Колинеарност K, F, Q даје тротеменике YDF и RNQ који су перспективни у односу на центар K , те имају осу коју чине $S(a, a \cdot c + b \cdot c) = (Y \vee D) \wedge (R \vee N)$, $U(a + b, (a + b) \cdot c) = (Y \vee F) \wedge (R \vee Q)$, $X = (D \vee F) \wedge (N \vee Q)$. Како су $X, U(a + b, (a + b) \cdot c)$ и $S(a, a \cdot c + b \cdot c)$ колинеарне то имамо $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, што доказује леву дистрибутивност.

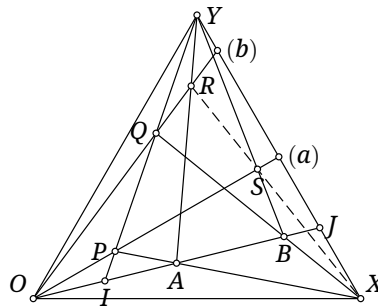


Доказали смо да је $(\mathbb{K}, +)$ комутативна група, да је $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ група, као и да важе леви и десни дистрибутивни закони, што значи да је $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ тело, односно да му до структуре поља фали само комутативност множења. Са друге стране за произвољно

тело $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, аналитичку раван добијамо на исти начин као и у случају поља (Теорема 2.4), тако што посматрамо $\mathbb{K}^3$ као модул над $\mathbb{K}$ и његове подмодуле. Конкретан доказ се лако добија једноставном провером да је са $T(a, b, c) = a \cdot b + c$ задат један (линеаран) тернарни прстен $(\mathbb{K}, T)$ у смислу дефиниције, после чега се позивамо на Теорему 2.7.

Теорема 3.37. *Свака Дезаргова раван је аналитичка раван над неким телом.*

Преостаје комутативност множења. Поставимо различите тачке $A(a, a)$ и $B(b, b)$ које су различите од O и I . Нека је $P(1, a) = (A \vee X) \wedge (Y \vee I)$ и $Q(1, b) = (B \vee X) \wedge (Y \vee I)$. Уочимо два пара колинеарних тачака O, A, B и Y, Q, P , односно прост шестотеменик $OQBYAP$ који за сецисишта наспрамних страница има тачке: $R(a, a \cdot b) = (O \vee Q) \wedge (Y \vee A)$, $X = (Q \vee B) \wedge (A \vee P)$, $S(b, b \cdot a) = (B \vee Y) \wedge (P \vee O)$.



Уколико је раван Папосова, то важи Папосова теорема и тачке X , $R(a, a \cdot b)$ и $S(b, b \cdot a)$ су колинеарне, што даје $a \cdot b = b \cdot a$, односно доказује комутативност множења. Уколико раван није Папосова, постоје тројке колинеарних тачака за које не важи Папосово тврђење, те можемо извршити координатизацију тако да то буду баш тачке простог шестотеменика $OQBYAP$, што доноси пар скалара за које не важи комутативност множења. Папосова раван је Дезаргова (Теорема 3.29), тако да тело $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ из Теореме 3.37 додатно добија комутативност множења и постаје поље.

Теорема 3.38. *Свака Папосова раван је аналитичка раван над неким пољем.*

Коначно смо у стању да илуструјемо неке примере пројективних равни које јесу Дезаргове, али нису Папосове. На основу Теорема 3.37 и 3.38 за то је довољно пронаћи неко тело које није поље. Класичан пример је тело кватерниона $\mathbb{H}$ које је 1843. године открио Хамилтон⁷ [37]. Кватерниони $\mathbb{H}$ представљају алгебарско проширење комплексних бројева. У питању је четвородимензиони векторски простор над реалним бројевима (скуповно важи $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$) са базом $1, i, j, k$, где су i, j, k имагинарне јединице за које важи $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Дакле, аналитичка раван $\mathbb{H}\mathbb{P}^2$ индукована телом $\mathbb{H}$ јесте Дезаргова, али није Папосова.

Међутим, коначни примери нису могући захваљујући Ведерберновој⁸ теорему која каже да је свако коначно тело заправо поље. Ведерберн [77] је први поставио своју теорему 1905. године, али је оригинални доказ садржао пропуст који је исте године отклонио Диксон⁹ [23]. За интересантан историјат и хронолошку листу доказа Ведербернове теореме можемо консултовати [61] и [1]. У сваком случају, као последицу добијамо наредну теорему.

Теорема 3.39. *Коначна пројективна раван је Папосова ако и само ако је Дезаргова.*

⁷William Rowan Hamilton (1805–1865), ирски физичар, астроном и математичар

⁸Joseph Henry Maclagan Wedderburn (1882–1948), шкотски математичар

⁹Leonard Eugene Dickson (1874–1954), амерички математичар

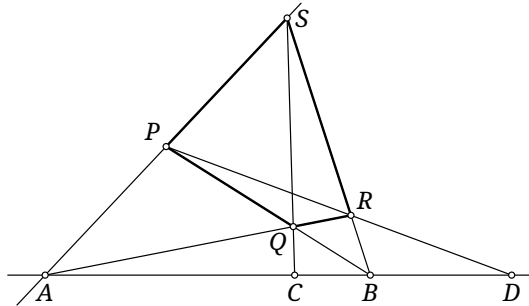
Доказ. По Теореме 3.29, Папосова раван јесте Дезаргова, тако да је потребно доказати обратни смер. Ако је раван Дезаргова, по Теореме 3.37 она је аналитичка над неким телом. Како је то тело коначно, по Ведерберновој теореме оно је поље, а аналитичка пројективна раван над неким пољем је свакако Папосова (Теорема 3.36). $\square$

Овде смо искористили алгебарске резултате да је коначност тела довољно јака да повуче комутативност множења. Међутим, можемо се упитати да ли до ове теореме можемо доћи геометријски. Нажалост, чисто геометријски доказ Теореме 3.39 није познат, а нешто најближе томе 2015. су објавили Бамберг¹⁰ и Пентила¹¹ [6], који су у свом доказу користили само елементарне алгебарске резултате.

3.10 Хармонијска четворка

Нека је $PQRS$ четворотеменик. Тачке P, Q, R, S су темена, а њихове спојнице дају укупно шест страница. Ако су две странице инцидентне са истим теменом кажемо да су оне **суседне**, док су у супротном оне **несуседне**. Постоји три пара несуседних страница, а њихова сецишта су **дијагоналне тачке**. Конкретно, три дијагоналне тачке четворотеменика $PQRS$ су $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$, $(P \vee R) \wedge (Q \vee S)$ и $(P \vee S) \wedge (Q \vee R)$.

Размотримо следећу конструкцију у пројективној равни. Нека су A, B, C различите тачке праве m . Нека је n права кроз A различита од m (Лема 2.10), и нека су P и S тачке праве n тако да су A, P и S различите (Лема 2.9). Дефинишемо $Q = (P \vee B) \wedge (S \vee C)$, $R = (Q \vee A) \wedge (S \vee B)$ и коначно $D = (A \vee B) \wedge (P \vee R)$.



За уређену четворку колинеарних тачака (A, B, C, D) кажемо да је **хармонијска четворка** и пишемо $\mathcal{H}(AB; CD)$ ако постоји четворотеменик $PQRS$ тако да су A и B дијагоналне тачке, док C и D леже на несуседним страницама које образују трећу дијагоналну тачку. Претходна конструкција за дате различите колинеарне тачке A, B, C даје тачку D за коју је $\mathcal{H}(AB; CD)$, односно конструише четворотеменик $PQRS$ такав да је $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$, $C = (S \vee Q) \wedge (A \vee B)$, $D = (P \vee R) \wedge (A \vee B)$.

Дијагоналне тачке четворотеменика су различите што даје $A \neq B$, док C и D леже на страницама на којима нису A и B , одакле је $A \neq C \neq B$ и $A \neq D \neq B$. Уколико тачке A, B, C, D при $\mathcal{H}(AB; CD)$ нису различите, тада мора бити $C = D$, што се дешава ако и само ако су дијагоналне тачке четворотеменика $PQRS$ колинеарне.

У неким пројективним равнима дијагоналне тачке четворотеменика могу бити колинеарне, што дозвољава да тачке хармонијске четворке не буду различите. На пример, у Фаноовој равни не постоје четири различите колинеарне тачке, самим тим дијагоналне тачке сваког четворотеменика су колинеарне, те тамо концепт хармонијске четворке нема смисла. То се не дешава у реалној пројективној равни, те колинеарне дијагоналне тачке можемо третирати као аномалију коју отклањамо наредном аксиомом.

¹⁰John Bamberg, аустралијски математичар

¹¹Tim Penttila, математичар

Аксиома 3.2 (Фаноова аксиома). Дијагоналне тачке сваког четворотеменика су неколинеарне.

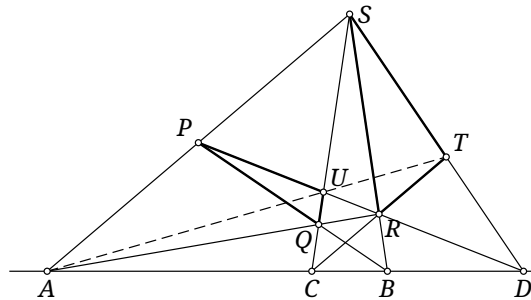
Уколико су дијагоналне тачке четворотеменика неколинеарне кажемо да је он **Фаноов**, док је у супротном **анти-Фаноов**. Фаноова аксиома каже да су сви четворотеменици Фаноови и гарантује да су све тачке хармонијске четворке различите. Како у самој дефиницији тачке A и B имају симетричну улогу, као и тачке C и D , то важи следећа лема.

Лема 3.40. Важи $\mathcal{H}(AB; CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(BA; CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(BA; DC) \Leftrightarrow \mathcal{H}(AB; DC)$.

Захваљујући претходној лемџ, ако је $\mathcal{H}(AB; CD)$, можемо рећи да је пар тачака C, D **хармонијски конјугован** са паром тачака A, B . Штавише, у Дезарговој равни ни редослед парова није битан, што се види из наредне леме.

Лема 3.41. У Дезарговој равни важи $\mathcal{H}(AB; CD) \Leftrightarrow \mathcal{H}(CD; AB)$.

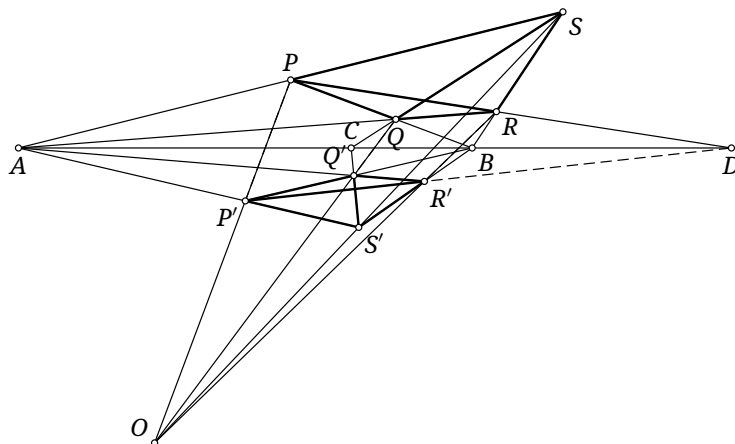
Доказ. Нека је $\mathcal{H}(AB; CD)$ и $PQRS$ четворотеменик из дефиниције, односно такав да важи $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$, $C \in (S \vee Q)$, $D \in (P \vee R)$. Нека је $T = (C \vee R) \wedge (S \vee D)$ и $U = (C \vee S) \wedge (P \vee D)$.



Тротеменици PQU и SRT су перспективни у односу на осу коју чине тачке B, C, D , те су по Обратној Дезарговој теорџми (Теорџма 3.3) перспективни у односу на центар $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R)$, одакле су T, U, A колинеарне. Четворотеменик $URTS$ има тачке C и D за дијагоналне, док A и B леже на $U \vee T$ и $S \vee R$ те је $\mathcal{H}(CD; AB)$. $\square$

Концепт хармонијске конјугованости уобичајено посматрамо у Папосовој или барем Дезарговој равни. У почетној конструкцији за дате колинеарне тачке A, B, C , послужили смо се произвољним тачкама P и S да бисмо добили тачку D . Међутим, тачка D не зависи од избора тих тачака о чему говори наредна теорџма.

Теорџма 3.42. У Дезарговој равни за различите колинеарне тачке A, B и C , постоји јединствена тачка D таква да важи $\mathcal{H}(AB; CD)$.

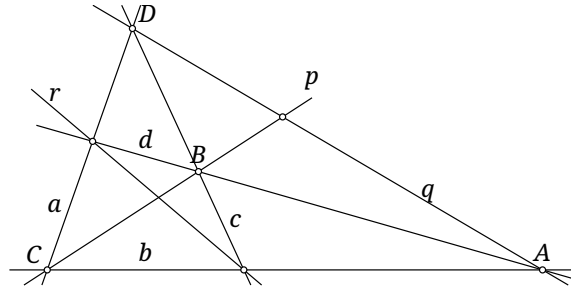


Доказ. Нека су $PQRS$ и $P'Q'R'S'$ четворотеменици који одређују четврту хармонијску тачку за тачке $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R) = (P' \vee S') \wedge (Q' \vee R')$, $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R) = (P' \vee Q') \wedge (S' \vee R')$ и $C = (S \vee Q) \wedge (S' \vee Q')$. Тротеменици PQS и $P'Q'S'$ имају осу јер су A, B, C колинеарне, те имају центар и праве $P \vee P', Q \vee Q'$ и $S \vee S'$ су конкурентне у некој тачки O . Тротеменици RQS и $R'Q'S'$ имају осу јер су B, A, C колинеарне, те имају центар и праве $R \vee R', Q \vee Q'$ и $S \vee S'$ су конкурентне у некој тачки O' . Одавде следи да су праве $P \vee P', Q \vee Q', R \vee R'$ и $S \vee S'$ конкурентне у $O = O'$. Како тротеменици PQR и $P'Q'R'$ имају центар O то имају и осу, те су тачке A, B и $(P \vee R) \wedge (P' \vee R')$ колинеарне. Зато су праве $A \vee B, P \vee R$ и $P' \vee R'$ конкурентне, одакле $(A \vee B) \wedge (P \vee R) = (A \vee B) \wedge (P' \vee R')$ даје јединствену тачку D . $\square$

Дуално хармонијској четворци тачака дефинишемо хармонијску четворку правих. За уређену четворку конкурентних правих (a, b, c, d) кажемо да је **хармонијска четворка** и пишемо $\mathcal{H}(ab; cd)$ ако постоји четвоространик $pqrs$ тако да су a и b дијагоналне праве, док c и d пролазе кроз несуседна темена које образују трећу дијагоналну праву.

Лема 3.43. Ако у пројективној равни важи Фаноова аксиома, онда важи и њен обраћ.

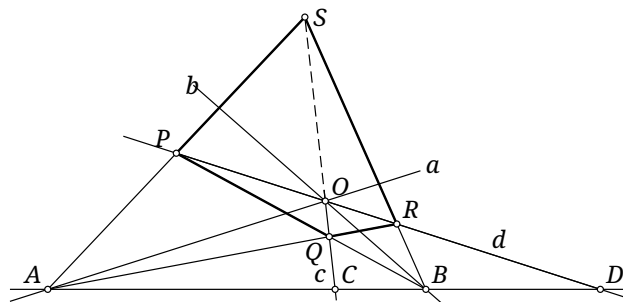
Доказ. Да ли су дијагоналне праве сваког четвоространика неконкурентне?



Нека је $abcd$ четвоространик такав да за дијагоналне праве има $p = (a \wedge b) \vee (c \wedge d)$, $q = (a \wedge c) \vee (b \wedge d)$ и $r = (a \wedge d) \vee (b \wedge c)$. Тачке $A = b \wedge d$, $B = c \wedge d$, $C = a \wedge b$ и $D = a \wedge c$ морају бити различите (иначе четвоространик има три конкурентне странице), одакле следи $A \vee B = d$, $A \vee C = b$, $D \vee B = c$, $D \vee C = a$. Међу уведеним тачкама нема три колинеарне (на пример колинеарност A, B, C повлачи $b = d$) те је $ABCD$ четворотеменик. По Аксиоми 3.2 дијагоналне тачке $a \wedge d$, $b \wedge c$ и $p \wedge q$ су неколинеарне, те су p, q и $r = (a \wedge d) \vee (b \wedge c)$ неконкурентне. $\square$

Принцип дуалности даље омогућава дуале наших теорема. На пример, у Дезарговој равни за конкурентне праве a, b, c постоји јединствена права d таква да је $\mathcal{H}(ab; cd)$.

Нека је $\mathcal{H}(AB; CD)$ и O произвољна тачка Дезаргове равни која није инцидентна са $A \vee B$. Покажимо да је $\mathcal{H}(ab; cd)$, где су $a = A \vee O$, $b = B \vee O$, $c = C \vee O$, $d = D \vee O$. Нека је Q произвољна тачка са праве c и нека су $P = (B \vee Q) \wedge d$, $R = (A \vee Q) \wedge d$, $S = (A \vee P) \wedge (B \vee R)$.



Четворотеменик $PQRS$ има дијагоналне тачке A и B , док D лежи на $d = P \vee R$, те како је $\mathcal{H}(AB; CD)$, то по Теореме 3.42 тачка C лежи на $Q \vee S$, одакле је $c = Q \vee S$. За четвоространик чије су странице $P \vee Q$, $Q \vee R$, $R \vee S$ и $S \vee P$ су c и d дијагоналне праве, док a и b пролазе кроз темена A и B која образују трећу дијагоналну праву.

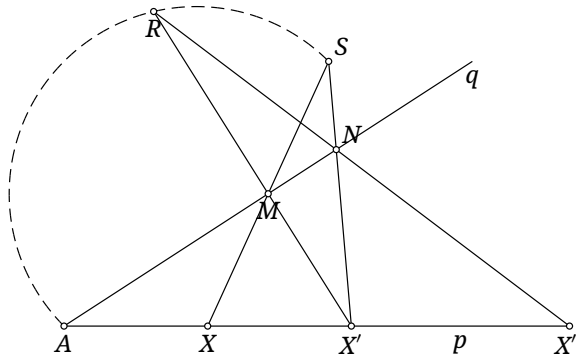
Важи и обрат, односно ако је $\mathcal{H}(ab; cd)$ и p произвољна права која није инцидентна са $a \wedge b$, тада за $A = a \wedge p$, $B = b \wedge p$, $C = c \wedge p$ и $D = d \wedge p$ имамо $\mathcal{H}(AB; CD)$. То доказује да перспективитет чува хармонијску конјугованост, а самим тим то важи и за пројективитет.

Теорема 3.44. У Дезарјовој равни хармонијска конјугованост је инваријантна пројективитетима.

Нека су тачке A, B, C, D праве p такве да је $\mathcal{H}(AB; CD)$, а A', B', C', D' тачке праве p' такве да је $\mathcal{H}(A'B'; C'D')$. По Теореме 3.9 постоји пројективитет $f = (p) \bar{\wedge} (p')$ за који је $(A, B, C) \mapsto (A', B', C')$, а како по Теореме 3.44 пројективитет f чува хармонијску конјугованост, те мора бити $f(D) = D'$.

Пример 3.20. У Папосовој равни дата је права p и пројективитет $f: (p) \rightarrow (p)$ тако да је $f(A) = A$. Доказаћемо да је A једина фиксна тачка од f ако и само ако за сваку тачку $X \in (p) \setminus \{A\}$ важи $\mathcal{H}(AX'; XX'')$, где је $X' = f(X)$ и $X'' = f(f(X))$.

За $q \in (A) \setminus \{p\}$ и $S \notin (p) \cup (q)$ конструишемо $M = SX \wedge q$, $N = SX' \wedge q$ и $R = X'M \wedge X''N$. По Основној теореме пројективитета $f = (p) \bar{\wedge} (q) \bar{\wedge} (p)$ јер пресликава $(A, X, X') \mapsto (A, X', X'')$.



Ако је A једина фиксна тачка од f , како је $RS \wedge p$ такође фиксна имамо $RS \wedge p = A$, одакле четворотеменик $MNSR$ доноси $\mathcal{H}(AX'; XX'')$. Обратно, за $\mathcal{H}(AX'; XX'')$ постоји четворотеменик $MNSR$ такав да је $A = MN \wedge SR$, $X' = MR \wedge NS$ и $X \in MS$, $X'' \in NR$. Ако је $B \in p$ фиксна, онда су и S и R инцидентне са $B \vee (BS \wedge q)$, те је $B = SR \wedge p = A$ $\triangle$

3.11 Бахманова раван

Аксиомама 2.1, 2.2, 2.3, 3.1 и 3.2 заокружили смо списак аксиома инциденције које је 1959. године предложио Бахман¹² [4, стр. 76–93], а касније подржао Коксетер [19, стр. 229–234]. Пројективну раван на коју смо додали Папосову теорему (која између осталог уклања не-Дезаргове равни) и Фаноову аксиому (која омогућава концепт хармонијске четворке) у недостатку бољег термина зваћемо **Бахманова раван**.

Бахманова раван је заправо Папосова раван у којој је сваки четворотеменик Фаноов, а захваљујући Леми 3.43 у њој важи Принцип дуалности. Из Теореме 3.36 и Теореме 3.38 знамо да је пројективна раван Папосова ако и само ако је аналитичка над неким пољем $\mathbb{F}$. Да ли је $\mathbb{FP}^2$ Бахманова раван?

¹²Friedrich Bachmann (1909–1982), немачки математичар

Нека је $ABCD$ произвољан четворотеменик аналитичке пројективне равни $\mathbb{F}P^2$. Како су A, B, C неколинеарне, то су вектори представници $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ линеарно независни и чине базу векторског простора $\mathbb{F}^3$. Вектор представник тачке D је њихова линеарна комбинација и нормирамо га са $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, тако што најпре фиксирамо $\vec{D}$, а затим бирамо векторе представнике $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ да важи дата веза.

Тако постављамо природни координатни систем у односу на четворотеменик $ABCD$. Одредимо дијагоналне тачке четворотеменика. За $E = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ имамо

$$\begin{aligned}\vec{E} &\propto \overrightarrow{A \vee B} \times \overrightarrow{C \vee D} \propto (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{D}) \\ &= (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B} + \vec{C})) = (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{A}) + (\vec{A} \times \vec{B}) \times (\vec{C} \times \vec{B}) \\ &= (\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}))\vec{B} - (\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}))\vec{A} + (\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}))\vec{B} - (\vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}))\vec{A} \\ &= -[\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}]\vec{A} + [\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}]\vec{B} = [\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}](\vec{A} - \vec{B}) \propto \vec{A} + \vec{B},\end{aligned}$$

што даје $\vec{E} \propto \vec{A} + \vec{B}$. За $F = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$ симетрија по $\vec{B}$ и $\vec{C}$ даје $\vec{F} \propto \vec{A} + \vec{C}$ док за $G = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$ симетрија по $\vec{A}$ и $\vec{C}$ даје $\vec{G} \propto \vec{B} + \vec{C}$. По Леми 3.13, колинеарност тачака зависи од линеарне зависности њихових вектора представника. Из услова $\alpha(\vec{A} + \vec{B}) + \beta(\vec{A} + \vec{C}) + \gamma(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{0}$ следи $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 0$, што је еквивалентно са $\alpha = \beta = \gamma$ и $2\alpha = 0$.

Уколико је карактеристика поља $\mathbb{F}$ различита од два, тада је $\alpha = \beta = \gamma = 0$, те су вектори $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ линеарно независни и дијагоналне тачке никад нису колинеарне. Уколико је карактеристика поља $\mathbb{F}$ једнака два, тада је $2\alpha = 0$, док свакако постоје $\alpha = \beta = \gamma = 1 \neq 0$, те су вектори $\vec{E}, \vec{F}, \vec{G}$ линеарно зависни и дијагоналне тачке су увек колинеарне.

Теорема 3.45. *Аналитичка пројективна равна $\mathbb{F}P^2$ је Бахманова ако и само ако поље $\mathbb{F}$ није карактеристике два.*

Од раније знамо да Фаноова равна не испуњава Фаноову аксиому, а сада имамо додатни аргумент. Одговарајуће поље Фаноове равни $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2$ је карактеристике два, што је случај са свим пољима чији је ред степен двојке. У $\mathbb{F}P^2$ где је $\mathbb{F}$ поље карактеристике два, сваки четворотеменик је анти-Фаноов. Уколико је сваки четворотеменик пројективне равни анти-Фаноов, онда је та равна Дезаргова, што је резултат који је 1956. године дао Глисон¹³ [35]

Постоје пројективне равни у којима се налазе и Фаноови и анти-Фаноови четворотеменици. Први такав пример је коначна пројективна равна реда 16 коју је 1953. године изложио Ленз¹⁴ [52]. Нешто касније Нојман¹⁵ је уопштила ту теорију показавши да за сваки $r \neq 4$ који је паран степен простог броја, постоји коначна пројективна равна реда r која има и Фаноове и анти-Фаноове четворотеменике [58].

Нека је $\mathbb{F}$ поље карактеристике различите од два. По Теорему 3.45 $\mathbb{F}P^2$ је Бахманова равна, сви четворотеменици су Фаноови и појам хармонијске конјугованости има смисла. Дворазмера је инваријанта пројективитета (Теорема 3.19), а то је и хармонијска конјугованост (Теорема 3.44), што значи да за $\mathcal{H}(AB; CD)$ имамо фиксирану дворазмеру $(ABCD)$. Међутим, по Леми 3.40 је $\mathcal{H}(BA; CD)$, те постоји пројективитет који слика $(A, B, C, D) \mapsto (B, A, C, D)$, што даје $(BACD) = (ABCD)$. Како по Теорему 3.20 важи $(BACD) \cdot (ABCD) = 1$, то је $(ABCD)^2 = 1$, одакле следи $(ABCD) = -1$ јер дворазмера не може бити један. Обратно, ако је $(ABCD) = -1$, а X јединствена тачка из Теореме 3.42 за коју важи $\mathcal{H}(AB; CX)$, то имамо $(ABCX) = -1$, те из Леме 3.21 следи $X = D$, односно $\mathcal{H}(AB; CD)$.

¹³Andrew Mattei Gleason (1921–2008), амерички математичар

¹⁴Hanfried Lenz (1916–2013), немачки математичар

¹⁵Hanna Neumann (1914–1971), немачко-аустралијска математичарка

Теорема 3.46. За поље $\mathbb{F}$ карактеристике различите од 2 у $\mathbb{FP}^2$ важи $\mathcal{H}(AB; CD)$ ако и само ако је $(ABCD) = -1$.

На Бахмановој аналитичкој правој $\mathbb{FP}^1$ за $\infty = (1 : 0)$ по дефиницији дворазмере имамо $(ABC_\infty) = (A^* - C^*) / (B^* - C^*)$. Зато је $\mathcal{H}(AB; C_\infty)$ ако и само ако је $A^* - C^* = C^* - B^*$, односно $2C^* = A^* + B^*$. Дакле, тачка која је хармонијски спрегнута са бесконачном тачком у односу на неки пар тачака има афину координату која је једнака аритметичкој средини афиних координата тачака тог пара.

Лема 3.47. На Бахмановој правој $\mathbb{FP}^1$ је $\mathcal{H}(AB; C_\infty)$ ако и само ако је $2C^* = A^* + B^*$.

Пример 3.21. Како за тачке $A(1 : 0)$, $B(2 : 1)$, $C(4 : 1)$, одредити тачку X такву да је $\mathcal{H}(AX; BC)$? За дате тачке можемо узети природне векторе представнике, док из $\mathcal{H}(AX; BC)$ следи $X \neq A(1 : 0)$, те постоји вектор представник $\vec{X} = (x, 1)$. Изразимо векторе $\vec{B}$ и $\vec{C}$ преко вектора $\vec{A}$ и $\vec{X}$ са

$$\begin{aligned}\vec{B} &= (2, 1) = (2 - x)(1, 0) + (x, 1) = (2 - x)\vec{A} + \vec{X}, \\ \vec{C} &= (4, 1) = (4 - x)(1, 0) + (x, 1) = (4 - x)\vec{A} + \vec{X}.\end{aligned}$$

Из $\mathcal{H}(AX; BC)$ је $(AXBC) = -1$, док директан рачун даје $(AXBC) = (1/(2 - x)) : (1/(4 - x))$, одакле је $(4 - x)/(2 - x) = -1$ и коначно $x = 3$, односно $X = (3 : 1)$.

Алтернативно, можемо приметити да је A бесконачна тачка, те је X по Лему 3.47 аритметичка средина тачака $B(2)$ и $C(4)$, одакле следи $X(3)$, односно $X = (3 : 1)$. $\triangle$

Пример 3.22. Ако је $\mathcal{H}(AB; CD)$, $\mathcal{H}(AC; BE)$ и $\mathcal{H}(AD; EF)$, колика је дворазмера $(ABEF)$? Нека је $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$. Из $(ABCD) = -1$ следи $\vec{D} \propto \alpha\vec{A} - \beta\vec{B}$. Из $(ACBE) = -1$ добијамо $(ABCE) = 1 - (ACBE) = 2$, одакле је $\vec{E} \propto 2\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$. Коначно, из $(ADE F) = -1$, како важи $\vec{E} \propto 2\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} = 3\alpha\vec{A} - (\alpha\vec{A} - \beta\vec{B}) = 3\alpha\vec{A} - \vec{D}$, то је $\vec{F} \propto 3\alpha\vec{A} + \vec{D} = 4\alpha\vec{A} - \beta\vec{B}$, одакле рачунамо $(ABEF) = (\beta/(2\alpha)) : (-\beta/(4\alpha)) = -2$. $\triangle$

Пример 3.23. Као последица Примера 3.20, параболички пројективитет f у $\mathbb{RP}^2$ је једнозначно одређен својом фиксном тачком A и сликом једне тачке $X' = f(X)$. Наиме, $X'' = f(X')$ је јединствена тачка из Теореме 3.42 за коју је $\mathcal{H}(AX'; XX'')$, док Основна теорема пројективитета једнозначно одређује f са $(A, X, X') \mapsto (A, X', X'')$.

Овај резултат се може лако оправдати аналитички. Ако уведемо координатни систем базним тачкама: $A(1 : 0)$, $X(0 : 1)$, $X'(1 : 1)$, онда за улазе m_{ij} матрице M пројективитета f важи $m_{21} = 0$ (из $A \mapsto A$) и $m_{12} = m_{22}$ (из $M \mapsto M'$). Карактеристични полином је $\det(M - \lambda \mathbb{1}) = (m_{11} - \lambda)(m_{22} - \lambda)$, а услов да је f параболично даје исте сопствене вредности $p_{11} = p_{22}$, те добијамо

$$M \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Даље је $\vec{X}'' \propto M\vec{X}'$, што даје $X'' = (2 : 1)$, док из Леме 3.47 следи $\mathcal{H}(AX'; XX'')$. $\triangle$

КОЛИНЕАЦИЈЕ

4.1 Пројективне колинеације

Пројективитети су пројективна пресликавања једнодимензионих објеката јер су им домени и кодомени низови тачака или праменови правих. Даље уопштење тиче се пресликавања дводимензионих објеката. Како је наш оперативни простор пројективна равна, то говоримо о аутоморфизмима равни, односно изоморфизмима равни на саму себе. **Колинеација** је аутоморфизам пројективне равни који чува релацију инциденције.

Прецизније, под колинеацијом пројективне равни $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ подразумевамо бијективна пресликавања $f_{\mathcal{T}}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ и $f_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ која чувају инциденцију, у смислу да ако важи $A\mathcal{I}p$ за неко $A \in \mathcal{T}$ и $p \in \mathcal{P}$, тада важи и $f_{\mathcal{T}}(A)\mathcal{I}f_{\mathcal{P}}(p)$. Инваријантност релације инциденције за различите тачке $A, B \in \mathcal{T}$ даје $f_{\mathcal{P}}(A \vee B) = f_{\mathcal{T}}(A) \vee f_{\mathcal{T}}(B)$, односно за различите праве $p, q \in \mathcal{P}$ даје $f_{\mathcal{T}}(p \wedge q) = f_{\mathcal{P}}(p) \wedge f_{\mathcal{P}}(q)$. Одавде следи да пресликавање $f_{\mathcal{T}}$ индукује $f_{\mathcal{P}}$, као и обротно, што је разлог да оба пресликавања обележавамо истим словом, на пример f , док саму колинеацију доживљавамо као трансформацију дисјунктне уније $\mathcal{T} \sqcup \mathcal{P}$. Колинеација пресликава колинеарне тачке у колинеарне тачке, што оправдава име, док конкурентне праве пресликава у конкурентне праве.

По дефиницији хармонијске конјугованости за $\mathcal{H}(AB; CD)$ постоји четворотеменик $PQRS$ са $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$, $C = (S \vee Q) \wedge (A \vee B)$, $D = (P \vee R) \wedge (A \vee B)$. Међутим, како „слику цртамо само помоћу лењира“ то ће колинеација сачувати слику и четворотеменик $f(P)f(Q)f(R)f(S)$ ће бити заслужан за $\mathcal{H}(f(A)f(B); f(C)f(D))$, што значи да колинеација чува хармонијску конјугованост.

Теорема 4.1. *Хармонијска конјугованост је инваријантна колинеације.*

Ако за неко $X \in \mathcal{T}$ важи $f(X) = X$, кажемо да је X **фиксна тачка**, а ако за неко $x \in \mathcal{P}$ важи $f(x) = x$, кажемо да је x **фиксна права**. Како важи $f(A \vee B) = f(A) \vee f(B)$ и $f(p \wedge q) = f(p) \wedge f(q)$, то сечиште фиксних правих мора бити фиксна тачка, а спојница фиксних тачака мора бити фиксна права. Идентичко пресликавање $\mathbb{1}$ има све тачке фиксне и то је тривијални пример колинеације.

Тачке које су инцидентне са фиксном правом не морају нужно бити фиксне тачке. Уколико је испуњен јачи услов, да су све тачке инцидентне са неком правом фиксне, тада за ту праву кажемо да је **тачка по тачка фиксна права**. Уколико неидентичка колинеација има тачка по тачка фиксну праву, онда се та права зове **оса колинеације**. Уколико неидентичка колинеација има тачку за коју важи да је свака права која је са њом инцидентна фиксна, онда се та тачка зове **центар колинеације**. Испоставља се да уколико колинеација има осу онда она има и центар, а важи и обротно.

Теорема 4.2. *Неидентичка колинеација има осу ако и само ако има центар.*

Доказ. Нека је s оса неидентичке колинеације f . Ако постоји фиксна тачка $S \notin (s)$, онда је произвољна права $p \in (S)$ инцидентна са фиксним тачкама S и $p \wedge s$, те је p фиксна права, што доказује да је S центар. Нека је (s) скуп свих фиксних тачака. За произвољну тачку $A \notin (s)$ је $f(A) \neq A$, те постоји спојница $a = A \vee f(A)$, а како је $S = a \wedge s$ фиксна тачка, то је $f(a) = f(A \vee S) = f(A) \vee S = a$ фиксна права. Оса s је фиксна, те нека је $p \in (S)$ произвољна права са $p \neq s$. Постоји $B \in (p)$ са $B \neq S$, те је по претходној анализи права $b = B \vee f(B)$ фиксна. Сециште фиксних правих a и b је фиксна тачка, те су праве a , b и s конкурентне у S , одакле је $p = S \vee B = b$ фиксна права, што доказује да је S центар. Показали смо да ако колинеација има осу, онда она има и центар, док обрат овог тврђења следи из Принципа дуалности (Теорема 2.2). $\square$

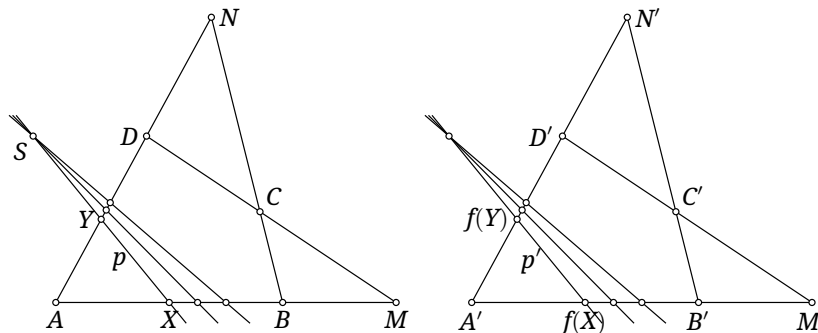
Природно је посматрати колинеацију као уопштење пројективитета, међутим рестрикција произвољне колинеације не мора бити пројективитет (видети Теорему 4.10), што нас мотивише да уведемо појам пројективне колинеације. **Пројективна колинеација** је колинеација f таква да је рестрикција $f|_p: (p) \rightarrow (f(p))$ пројективитет за сваку праву p . За пројективност колинеације потребно је проверити да ли су њене рестрикције на сваку праву пројективитети, али то је довољно проверити за једну праву, што видимо у наредној леми [38].

Лема 4.3. *Ако је рестрикција колинеације f пројективне равни на неку праву пројективитет, онда је f пројективна колинеација.*

Доказ. Нека је f колинеација и $f|_p$ пројективитет за неку праву p . Нека је $q \neq p$ произвољна права, а тачка $S \notin (p) \cup (q)$. Перспективитет $(q) \overset{S}{\wedge} (p)$ слика $A \in (q)$ у $B \in (p)$ тако да су A, B, S колинеарне, а како је f колинеација то су и $f(A), f(B), f(S)$ колинеарне. Зато је $f|_q = (q) \overset{S}{\wedge} (p) \overset{f|_p}{\wedge} (f(p)) \overset{f(S)}{\wedge} (f(q))$, што је композиција пројективитета и самим тим пројективитет. $\square$

Егзистенцију и једнозначност пројективне колинеације видимо у наредној теорему.

Теорема 4.4 (Основна теорема колинеације). *Постоји јединствена пројективна колинеација Папосове равни која ће мена четворостеменика $ABCD$ слика редом у њему четворостеменика $A'B'C'D'$.*



Доказ. Нека су $ABCD$ и $A'B'C'D'$ четворостеменници, а f пројективна колинеација Папосове равни за коју је $(A, B, C, D) \mapsto (A', B', C', D')$. Тачка $M = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ се колинеацијом f мора пресликати у $M' = (A' \vee B') \wedge (C' \vee D')$, док је $f|_{A \vee B}$ по Основној теорему пројективитета једнозначно одређено са $(A, B, M) \mapsto (A', B', M')$. Сасвим слично, колинеацијом f се тачка $N = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$ мора пресликати у $N' = (A' \vee D') \wedge (B' \vee C')$, док је $f|_{A \vee D}$ по Основној теорему пројективитета једнозначно одређено са $(A, D, N) \mapsto (A', D', N')$.

Произвољна права $p \notin (A)$ је инцидентна са $X = (A \vee B) \wedge p$ и $Y = (A \vee D) \wedge p$, те је $p = X \vee Y$, што се колинеацијом f слика у $p' = f|_{A \vee B}(X) \vee f|_{A \vee D}(Y)$. Свака тачка осим A је

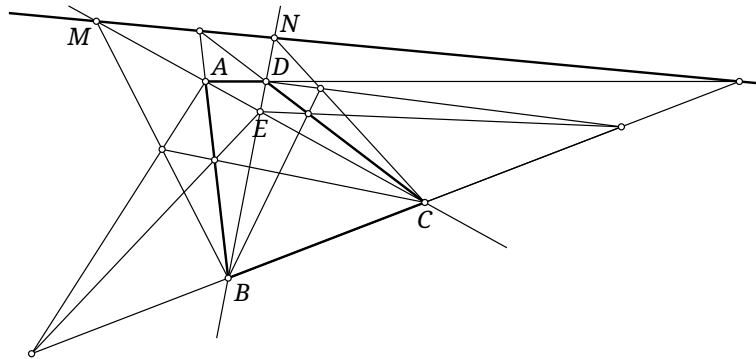
сециште две праве које не пролазе кроз A (Лема 2.10), што гарантује једнозначност колинеације f . За егзистенцију је довољно показати да се конкурентне праве сликају у конкурентне. Посматрајмо фамилију правих p које су конкурентне у некој тачки S и пројективитет

$$h = (A' \vee B')^{f^{-1} \downarrow_{A' \vee B'}} (A \vee B) \stackrel{S}{\wedge} (A \vee D) \uparrow_{A \vee D}^{f} (A' \vee D')$$

за који важи $f(X) \mapsto X \mapsto Y \mapsto f(Y)$. Дакле, имамо $h(f(X)) = f(Y)$, али и $h(A') = A'$, те је h перспективитет по Теорему о перспективитету, одакле следи да су све праве облика $p' = f(X) \vee f(Y)$ конкурентне. $\square$

Интуитивна пројективна раван $\mathbb{RP}^2$ се природно поистовећује са $\mathbb{RP}^2$ одакле на располагању имамо бесконачну праву $u_\infty = [0 : 0 : 1]$. Ако је f колинеација интуитивне равни, онда се права $u = f^{-1}(u_\infty)$ зове **противоса**, док је $f(u_\infty)$ **хоризонт**.

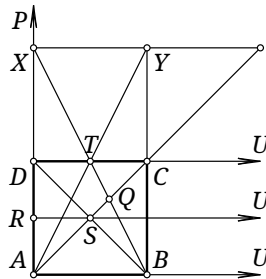
Пример 4.1. Ако колинеација дат четвороугао $ABCD$ слика у паралелограм одредити јој противосу.



Како је $A'B' \parallel C'D'$ и $A'D' \parallel B'C'$, то су тачке $A'B' \wedge C'D'$ и $A'D' \wedge B'C'$ бесконачне, одакле следи да $AB \wedge CD$ и $AD \wedge BC$ припадају противоси.

Алтернативно, четвороугао је паралелограм ако и само ако му се дијагонале полове. Ако је $E = AC \wedge BD$, њена слика E' мора бити средиште дужи $B'D'$ и $A'C'$. То нас мотивише да уведемо тачке M и N тако да важи $\mathcal{H}(AC; EM)$ и $\mathcal{H}(BD; EN)$. Применом колинеације инваријантност даје $\mathcal{H}(A'C'; E'M')$ и $\mathcal{H}(B'D'; E'N')$, одакле следи да су тачке M' и N' бесконачне (Лема 3.47). Коначно, M и N припадају противоси $u = MN$. $\triangle$

Пример 4.2. Нека је $ABCD$ квадрат са центром S и нека су T и R редом средишта дужи CD и AD . Ако пројективна колинеација f пресликава $(A, B, C, D) \mapsto (B, C, S, T)$, конструисати $f(R)$.



Нека је $f(R) = X$. Из $R \in AD$ следи $X \in BT$. Из $S = AC \wedge BD$ имамо $f(S) = BS \wedge CT = D$. Посматрајмо $U = RS \wedge u_\infty = AB \wedge CD$ за које је $f(U) = BC \wedge ST = AD \wedge u_\infty = P$. Имамо $f(RS) = f(SU) = f(S) \vee f(U) = DP = AD$, одакле због $R = AD \wedge RS$ добијамо $X = BT \wedge AD$, односно X је тачка симетрична A у односу на D .

Алтернативно, можемо приметити да је R средиште дужи AD , одакле следи $\mathcal{H}(AD; PR)$, где је $P = AD \wedge u_\infty$. Како је хармонијска конјугованост инваријанта колинеације важи $\mathcal{H}(BT; Qf(R))$, где је $Q = f(P) = f(AD \wedge BC) = BT \wedge CS$. Преостаје конструкција четврте хармонијске тачке за познате три B, T, Q . Ако је X симетрична A у односу на D , а Y симетрична B у односу на C , четворотеменик $AUCY$ има дијагоналне тачке $AU \wedge CY = B$ и $AY \wedge UC = T$, док је $AC \wedge BT = Q$ и $UY \wedge BT = X$, што значи $\mathcal{H}(BT; QX)$, одакле је $f(R) = X$. $\triangle$

4.2 Перспективне колинеације

Посебан тип неидентичке колинеације која има осу, а самим тим по Теорему 4.2 и центар, зовемо **йерсйективна колинеација** (или **ценйрална колинеација**). За центар S важи $A \vee S = f(A \vee S) = f(A) \vee f(S) = f(A) \vee S$, те су $A, f(A), S$ колинеарне, док за осу s важи $a \wedge s = f(a \wedge s) = f(a) \wedge f(s) = f(a) \wedge s$, те су $a, f(a), s$ конкурентне.

Лема 4.5. *За йерсйективну колинеацију су йроизвольна йтачка, њена слика и ценйрална колинеарне йтачке, док су йроизвольна йправа, њена слика и оса конкурентне йправе.*

Правила из претходне леме су довољна да се изведе једнозначност перспективне колинеације f са центром S , осом s и паром одговарајућих тачака A и $A' = f(A)$, где су A, A', S различите колинеарне тачке. За произвољно $B \notin (S \vee A) \cup (s)$ и $B' = f(B)$ су тачке B, B', S колинеарне, а праве $A \vee B, A' \vee B', s$ конкурентне, одакле је тачка B' једнозначно одређена са $B' = (S \vee B) \wedge (A' \vee ((A \vee B) \wedge s))$. Наравно, тачке из $(s) \cup \{S\}$ су фиксне, те преостају тачке $C \in (S \vee A) \setminus \{S\}$, где за неко фиксирано B по претходном принципу имамо једнозначно $C' = (S \vee C) \wedge (B' \vee ((B \vee C) \wedge s))$.

Лема 4.6. *Персйективна колинеација једнозначно је одређена осом, ценйром и йпаром одговарајућих йтачака.*

Претходна конструкција генерише бијективно пресликавање (пермутовањем тачака A и A' добијамо инверз), те је за егзистенцију перспективне колинеације довољно показати да је у питању колинеација, односно да чува колинеарност. То је могуће показати у Дезарговој равни. Основна идеја је приметити да су тротеменици AMN и $A'M'N'$ перспективни у односу на S , те су тачке $(A \vee M) \wedge (A' \vee M')$, $(A \vee N) \wedge (A' \vee N')$ и $(M \vee N) \wedge (M' \vee N')$ колинеарне. Међутим, по конструкцији прве две наведене тачке су инцидентне са s , те су праве $M \vee N, M' \vee N'$ и s конкурентне. За тачку $P \in (M \vee N)$ су $M \vee P, M' \vee P'$ и s конкурентне, те $M \vee N = M \vee P$, даје $M' \vee N' = M' \vee P'$, односно $P' \in (M' \vee N')$. Овим смо доказали да је конструисана перспективна колинеација са наведеним особинама, а занимљиво је приметити да се центар и оса колинеације поклапају са центром и осом посматраних тротеменика. Дакле, у Дезарговој равни постоје „све могуће“ перспективне колинеације, што је доказао Бер¹ 1942. године [5].

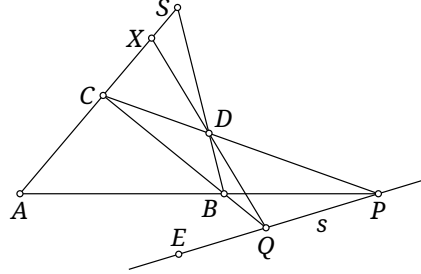
Теорема 4.7 (Бер). *Ако су A, A', S колинеарне йтачке Дезарйове равни и s йправа са $A, A' \notin (s)$, йтада йпостйои йединствена йерсйективна колинеација са осом s и ценйром S која йрсликава A у A' .*

Пример 4.3. Дуално Лему 4.6, перспективна колинеација је једнозначно одређена центром, осом и паром одговарајућих правих. Ако p и p' чине одговарајући пар правих, то су p, p', s конкурентне, а произвољна права $a \in (S)$ даје пар тачака $A = a \wedge p$ и $A' = a \wedge p'$ и доказ своди на Лему 4.6. $\triangle$

¹Reinhold Baer (1902–1979), немачки математичар

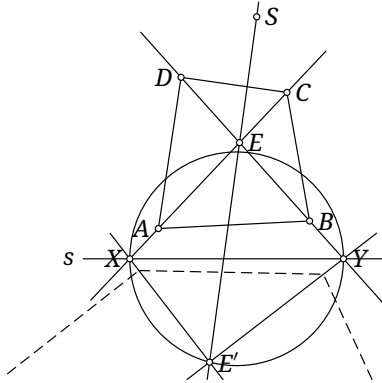
Пример 4.5. Перспективна колинеација интуитивне равни је једнозначно одређена центром S , осом s и противосом $u \parallel s$. За произвољну праву $p \not\parallel S$ уведемо $P = p \wedge u$ и $X = p \wedge s$, одакле је $P' = PS \wedge u_\infty$, те $p' = X \vee P'$. Тако је слика праве p права кроз X паралелна са PS и прича се своди на Пример 4.3. $\triangle$

Пример 4.6. У пројективној равни дат је петотеменик $ABCDE$. Ако за перспективну колинеацију f важи $f(A) = C$, $f(B) = D$ и $f(E) = E$, конструисати $f(C)$.



Вишеструко користимо особине центра S и осе s из Леме 4.5. Из $f(A) = C$ и $f(B) = D$ добијамо $S = AC \cap BD$, као и $f(AB) = CD$ одакле следи $AB \cap CD \in (s)$. Како је $f(E) = E \neq S$, то имамо $E \in s$, те је $s = (AB \cap CD) \vee E$. Перспективна колинеација f је једнозначно одређена осом s , центром S и паром тачака, рецимо, $A \mapsto C$. Ако је $X = f(C)$, тачке C, X, S су колинеарне, а праве CB, XD, s конкурентне у $Q = CB \cap s$, те је $X = CS \cap QD$. $\triangle$

Пример 4.7. Дата је тачка S , права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективну колинеацију са осом s и центром S која дати четвороугао пресликава у четвороугао коме су дијагонале нормалне.



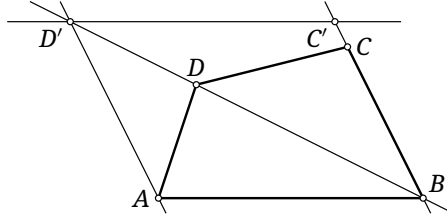
Размотримо општи случај. Нека је $E = AC \cap BD$, $X = AC \cap s$, $Y = BD \cap s$. Из $X, E \in AC$ следи $AC = XE$ и $A'C' = XE'$, док из $Y, E \in BD$ следи $BD = YE$ и $B'D' = YE'$. Из $A'C' \perp B'D'$ је $XE' \perp YE'$, односно $\angle XE'Y = \pi/2$, те E' лежи на кругу $k(XY)$ над пречником XY . Избор тачке $E' \in SE \cap k(XY)$ једнозначно одређује перспективну колинеацију са осом s , центром S и паром тачака $E \mapsto E'$.

Пресек праве и круга је празан скуп, тачка или две тачке. У општем случају имамо две тачке од којих свака дефинише перспективну колинеацију која задовољава дате услове. Уколико за изабрану тачку E' , противоса u (права паралелна са s кроз тачку која је пресек праве AC и праве кроз S паралелне са XE') сече четвороугао $ABCD$ ствари се компликују јер тада његова слика $A'B'C'D'$ није четвороугао у класичном смислу.

Размотримо неке специјалне случајеве. У случају $S = E'$ неопходно је $\angle AEB = \pi/2$, да би задатак имао решење. У општем случају који смо решили постоје тачке X и Y , односно важи $AC \not\parallel s$ и $BD \not\parallel s$. Уколико је $AC \parallel s \parallel BD$ било би $A'C' \parallel B'D'$ што је немогуће. У случају $AC \parallel s$ и $BD \not\parallel s$ пресек X не постоји, али важи $AC \parallel s \parallel A'C'$, те из $B'D' \perp A'C'$ имамо $B'D' \perp s$. Тада за $Y = BD \cap s$ имамо $Y \in B'D'$, те је B' сециште праве SB и праве кроз Y нормалне на s . $\triangle$

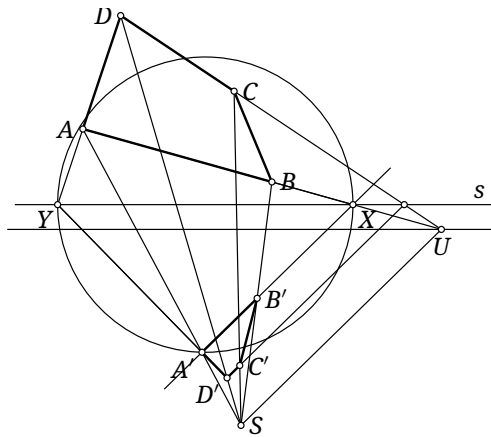
Пример 4.8. Дат је четвороугао $ABCD$ који није трапез. Одредити све перспективне колинеације којима су A и B фиксне тачке, док четвороугао $ABCD$ преводи у паралелограм.

Све фиксне тачке чине $s \cup \{S\}$, где је S центар, а s оса. За $A \neq S \neq B$ имали бисмо $s = AB$, одакле су праве $CD, C'D', AB$ конкурентне. Како је $ABC'D'$ паралелограм, то је $AB \parallel C'D'$ и отуда $AB \parallel CD$, што је немогуће јер $ABCD$ није трапез. Овим закључујемо да S мора бити једна од тачака A и B .



Уколико је $S = B$ из особина центра имамо $C' \in BC$ и $D' \in BD$. Са друге стране $ABC'D'$ је паралелограм, одакле важи $BC' \parallel AD'$, те је тачка D' сециште праве BD и праве кроз A паралелне $BC = BC'$, док је тачка C' сециште праве BC и праве кроз D' паралелне AB . По Основној теореми колинеације, $(A, B, C, D) \mapsto (A, B, C', D')$ једнозначно одређује колинеацију. Друго решење добија се у случају $S = A$, где спроведемо аналоган поступак симетријом по A и B . $\triangle$

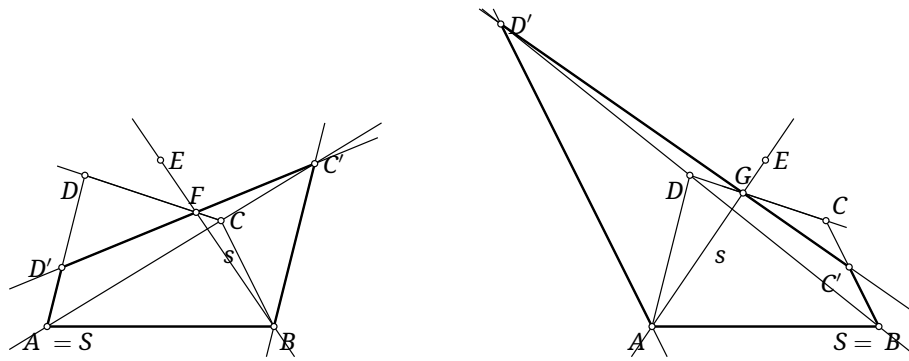
Пример 4.9. Дат је четвороугао $ABCD$ који није трапез и права s . Одредити перспективну колинеацију са осом s која четвороугао $ABCD$ преводи у правоугли трапез $A'B'C'D'$ са основицом $C'D'$, и правим углом код темена A' , тако да је угао између AB и $A'B'$ једнак $\pi/3$.



По услови задатка имамо $A'B' \parallel C'D'$ одакле је $U = AB \cap CD$ тачка противосе, коју можемо добити са $U \in u \parallel s$. Ако је $X = AB \cap s$ и $Y = AD \cap s$, прав угао код темена A' реализујемо са $A' \in k(XY)$. Додатни услов $\angle(AB, A'B') = \pi/3$ заправо значи $\angle AXA' = \pi/3$, те A' добијамо у пресеку круга над пречником XY и праве кроз X која са AX заклапа угао $\pi/3$. Тачка U слика се у бесконачну тачку праве XA' тако да центар S колинеације мора бити сециште AA' и праве кроз U паралелне XA' . Перспективна колинеација је сада одређена центром S , осом s и паром тачака A, A' . $\triangle$

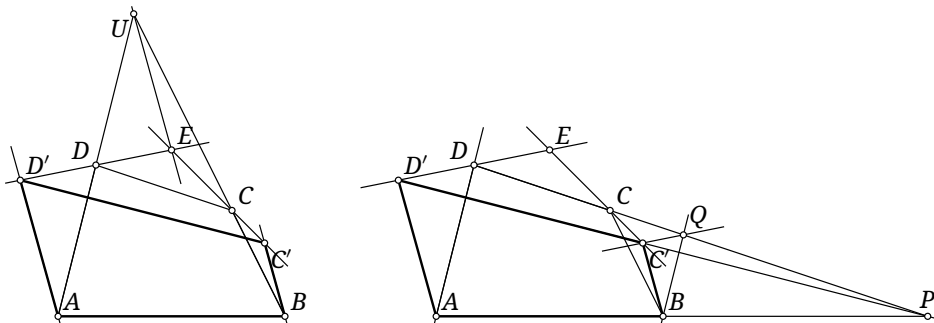
Пример 4.10. Дате су тачке A, B, C, D, E међу којима нема три колинеарне, нити било која два пара чине паралелне спојнице. Ако су A, B, E фиксне тачке хомологије f која четвороугао $ABCD$ пресликава у трапез са основицом $f(BC)$, одредити слику тог четвороугла $f(ABCD)$ у свим могућим случајевима.

Хомологија f има центар S и осу s , а све фиксне тачке од f припадају скупу $s \cup \{S\}$. Због тога разликујемо два случаја у зависности да ли је тачка E центар.



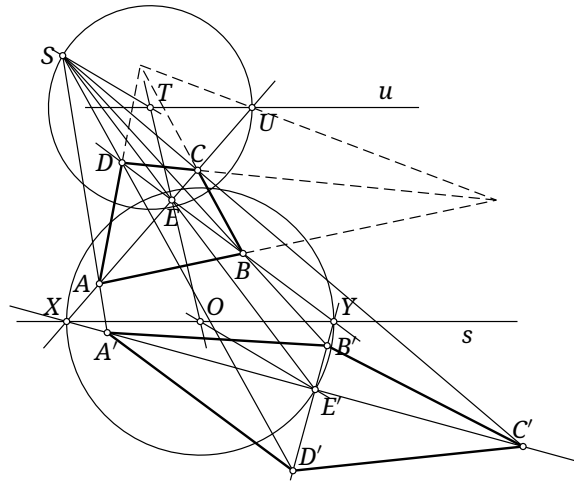
Ако E није центар имамо две опције, у првој је $S = A$ и $s = BE$, а у другој $S = B$ и $s = AE$. Размотримо прву опцију где најпре из особина центра имамо $C' \in AC$ и $D' \in AD$. Из трапеца следи $AD = AD' \parallel BC'$, те је C' сециште праве AC и праве кроз B паралелне AD . Тачка $F = BE \cap CD$ припада оси, те из особина осе $F \in C'D'$, одакле је $D' = AD \cap C'F$. Друга опција када E није центар решава се аналогно из симетрија где пермутујемо слова A и B , односно C и D . Конкретно D' је сециште праве BD и праве кроз A паралелне BC , док је $C' = BC \cap D'G$, где је $G = AE \cap CD$.

Преостало је случај кад је E центар, а тада AB мора бити оса. Нека је $U = AD \cap BC$. Како је у трапецу $AD' \parallel BC'$ то је $U' = AD' \cap BC'$ бесконачна тачка и зато U припада противоси u . Из особина центра $C' \in EC$, $D' \in ED$, али и $U' \in EU$, одакле је U' бесконачна тачка праве EU . Због тога C' је сециште EC и праве кроз B паралелне EU , док је D' сециште ED и праве кроз A паралелне EU .



Алтернативно можемо посматрати $P = AB \cap CD$, те Q као сециште DC и праве кроз B паралелне AD . Сада је C' сециште EC и праве кроз Q паралелне ED , као и $D' = PC' \cap ED$. Како је $AD \parallel BQ$, Талесова теорема даје однос дужина дужи $PA : PB = PD : PQ$, а затим због $DD' \parallel QC'$ имамо $PD : PQ = PD' : PC'$. Даље је $PA : PB = PD : PQ = PD' : PC'$ и по Обратној Талесовој теореме важи $AD' \parallel BC'$, те је $ABC'D'$ траpez. $\triangle$

Пример 4.11. Дат је четвороугао $ABCD$ и права s . Одредити геометријско место тачака потенцијалних центара хомологије са осом s која дати четвороугао пресликава у делтоид.



Делтоид је четвороугао коме су дијагонале нормалне, при чему једна дијагонала полови другу. За $E = AC \cap BD$ је $E' = A'C' \cap B'D'$ при чему услове делтоида $A'B'C'D'$ можемо записати са $A'E'C' \perp B'E'D'$ и $A'E' \cong C'E'$. Ако уведемо тачку U са $\mathcal{H}(AC; EU)$ имамо $\mathcal{H}(A'C'; E'U')$, а како је E' средиште дужи $A'C'$, тачка U' је бесконачна, те U припада противоси. Противоса u је паралелна оси и конструишемо је са $U \in u \parallel s$.

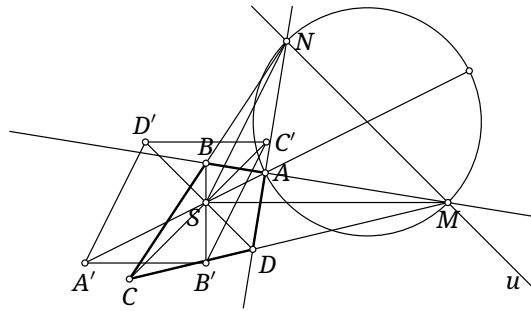
У општем случају важи $AC \parallel s$ и $BD \parallel s$ те имамо $X = AC \cap s$ и $Y = BD \cap s$. Нормалност $A'C'XE' \perp B'D'YE'$ налази E' на кругу над пречником XY . Нека је O средиште дужи XY (O је центар круга $k(XY) \ni E'$) и нека је $T = OE \cap u$. За центар S хомологије важи $S = EE' \cap UU'$, те како је $T' = ST \cap u_\infty$ из $T \in OE$ је $T' = OE' \cap u_\infty$, одакле је $ST \parallel OE'$. Талесова теорема даје $TS : OE' = TE : OE$, те је дужина дужи TS константна, што значи да су потенцијални центри на неком кругу са центром у T . Конкретније, Талесова теорема из $u \parallel s$ даје $TE : OE = TU : OX$, што значи $TS : OE' = TU : OX$, те из $OE' \cong OX$ добијамо $TS \cong TU$. Потенцијалне тачке S леже на кругу са центром T полупречника $r \cong TU$.

Што се специјалних случајева тиче размотримо $BD \parallel s$, где немамо тачку Y из претходног разматрања. Из $BD \parallel s$ следи $B'E'D' \parallel s$, те због $A'E' \perp B'E'$ тачка E' мора бити на правој кроз X нормалној на s . Потенцијални центри S налазе се на правој кроз U нормалној на s . Ако је додатно и $AC \parallel s$, те немамо тачку X , имали бисмо $U \in AC \parallel s$, односно $u = AC$, те су A' и C' бесконачне и нема делтоида. $\triangle$

Пример 4.12. Дат је троугао ABC и тачке $M \in AC$ и $N \in BC$. Одредити елацију f са центром C тако да је $f(M)f(N)$ средња линија троугла $f(A)f(B)f(C)$.

Како је $f(M)$ средиште дужи $f(A)f(C)$, то тачка X за коју важи $\mathcal{H}(AC; MX)$ лежи на противоси. Како је $f(N)$ средиште дужи $f(B)f(C)$, то тачка Y за коју важи $\mathcal{H}(BC; NY)$ лежи на противоси. Ако је $U = AB \cap MN$, $V = AN \cap CU$, $W = BM \cap CU$, тада захваљујући четворотеменицима $BNUV$ и $AMUW$ добијамо $X = BV \cap AC$ и $Y = AW \cap BC$, те је противоса $u = XY$ (и наравно $U \in u$). Оса s је паралелна противоси те је добијамо као праву кроз C која је паралелна са u . Перспективна колинеација је одређена центром C , осом s и противосом u . $\triangle$

Пример 4.13. У еуклидској равни дат је паралелограм $A'B'C'D'$, тачка S и права u . Конструисати четвороугао $ABCD$ са правим углом код темена A који се слика на $A'B'C'D'$ при хомологији са центром S и противосом u .



Из $M' = A'B' \cap C'D' \in u_\infty$ имамо $M = AB \cap CD \in u$, док из $N' = A'D' \cap B'C'$ имамо $N = AD \cap BC \in u$. Због тога M конструишемо као сециште праве u и праве кроз S паралелне са $A'B'$, док N конструишемо као сециште праве u и праве кроз S паралелне са $A'D'$. Како је угао код темена A прав то A припада кругу над пречником MN , те имамо $A \in k(MN) \cap SA'$ (што у општем случају даје два решења). Хомологија је одређена центром, противосом и једним паром тачака (на пример можемо добити осу као праву кроз $AM \cap A'B'$ која је паралелна са u), тако да је једноставно завршити конструкцију четвороугла $ABCD$, рецимо, $B = AM \cap SB'$, $D = AN \cap SD'$, $C = BN \cap DM$. $\triangle$

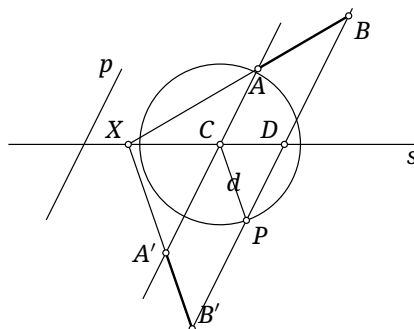
4.3 Перспективне афиности

Посматрајмо колинеацију интуитивне пројективне равни $\mathbb{P}^2$ која има особину да коначне елементе шаље у коначне, а бесконачне у бесконачне. Рестрикцијом такве колинеације на интуитивну раван $\mathbb{E}^2$ добијамо трансформацију афине равни, а за саму бијекцију кажемо да је **афино пресликавање**. Дакле, u_∞ је фиксна права афиног пресликавања, а самим тим и противоса. Афина пресликавања очигледно чувају паралелност, а како чувају дворазмеру, онда чувају и однос дељења дужи.

Занимљиво је класификовати афине перспективне колинеације. Перспективне колинеације за фиксне праве имају само осу и праве које пролазе кроз центар, тако да лако можемо класификовати примере афиних перспективних колинеација, за које је $u = u_\infty$. Хомологија ($S \notin s$) за коју важи $s = u$ је **хомоидејија**, а хомологија код које $S \in u_\infty$ је перспективна **афиносћ**. Елација ($S \in s$) код које је $s = u$ је **транслација**, а она код које је $S \in u_\infty \neq s$ је **трансвекција** (или **смицање**).

Перспективна афиносћ је најчешћи случај са којим се срећемо и подразумева хомологију која има коначну осу, док је центар бесконачна тачка. Уколико имамо пар одговарајућих тачака, одмах знамо и центар, што је бесконачна тачка њихове спојнице. Самим тим све спојнице одговарајућих тачака су међусобно паралелне и чине такозване зраке афиности.

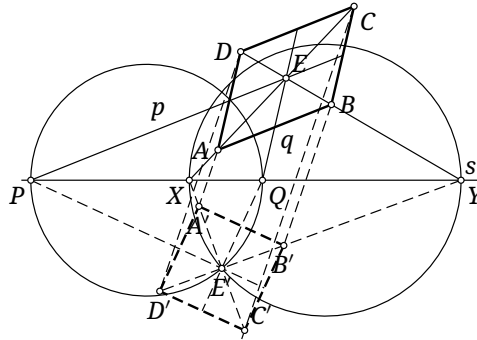
Пример 4.14. Дата је дуж AB и праве p и s . Одредити перспективну афиносћ чија је оса s , зраци афиности су паралелни са p , а слика дужи AB има дату дужину d .



За $X = AB \wedge s$ је $X \in A'B'$, а такође знамо $AA' \parallel BB' \parallel p$. За $C = AA' \wedge s$ и $D = BB' \wedge s$ тражимо $P \in BB'$ тако да је $CP \parallel A'B'$ јер је тада $CPB'A'$ паралелограм и $CP \cong A'B' \cong d$. Конструкција почиње тако што праве паралелне са p кроз A и B секу s у тачкама C и D . Затим је P у пресеку праве BD и круга са центром C и полупречником d . Коначно, A' и B' су пресеци праве кроз $X = AB \wedge s$ паралелне CP са AC , односно BD .

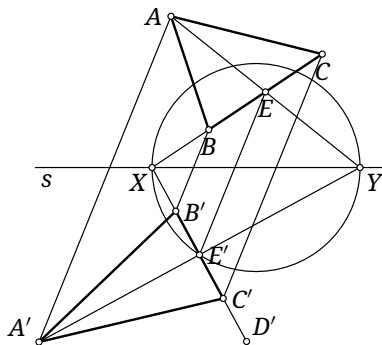
Број решења зависи од броја пресека праве BD и круга са центром C и полупречником d . Обележимо са r растојање између правих AA' и BB' . Ако је $d < r$ нема решења, а ако је $d = r$ имамо јединствено решење $A' = C, B' = D$. У општем случају је $d > r$ кад имамо два решења. Наравно, у случају да је $AB \parallel s$ задатак нема решења, осим ако није $AB \cong d$. $\triangle$

Пример 4.15. Дата је права s и четвороугао $ABCD$. Одредити перспективну афиност која има осу s , а дати четвороугао пресликава у квадрат.



Перспективна афиност чува паралелност, те ако $ABCD$ није паралелограм нема решења. Посматрајмо тачку $E = AC \wedge BD$ која се слика у центар $E' = A'C' \wedge B'D'$ квадрата $A'B'C'D'$. Нека су p и q праве за које важи $E \in p \parallel AB \parallel DC$ и $E \in q \parallel AD \parallel BC$. Сада је $A'B'C'D'$ квадрат ако и само ако је $\angle p'E'q' = \pi/2 = \angle A'E'B'$. Са једне стране из $A'C' \perp B'D'$ важи $E' \in k(XY)$, где је $X = AC \wedge s, Y = BD \wedge s$. Са друге стране из $p' \perp q'$ важи $E' \in k(PQ)$, где је $P = p \wedge s, Q = q \wedge s$. Закључујемо да најпре E' бирамо са $E' \in k(XY) \cap k(PQ)$, након чега је перспективна афиност одређена осом s и паром тачака E и E' . $\triangle$

Пример 4.16. Дата је права s и тачке A, B, C, D' . Перспективна афиност са осом s слика троугао ABC у једнакокраки троугао $A'B'C'$ са основицом $B'C'$, тако да D' лежи на правој $B'C'$. Конструисати троугао $A'B'C'$ у општем случају.



Нека је E средиште дужи BC . Афиност чува односе дељења дужи те се E слика у средиште E' дужи $B'C'$. Како је $A'B' \cong A'C'$, то је E' подножје висине троугла $A'B'C'$ из темена A' . У општем случају постоје пресеци $X = BC \wedge s$ и $Y = AE \wedge s$, за које важи $X \in B'C'$ и $Y \in A'E'$. Како је $B'C'XE' \perp A'YE'$ и $E' \in B'C'D'X$, то је E' подножје висине из Y на $D'X$. Зато E' мора бити на кругу над пречником XY , те имамо једнозначно $X \neq E' \in k(XY) \cap D'X$. Перспективна афиност је одређена осом s и паром тачака E и E' . Тачке B' и C' добијамо у пресеку праве XD' са правом паралелној EE' кроз B , односно C , док тачку A' можемо добити у пресеку YE' и праве кроз A паралелне са EE' . $\triangle$

124

пројективне равни који чува хармонијску конјугованост (Теорема 4.1) бити пројективитет?

Бијективно пресликавање са особином да хармонијску четворку тачака шаље у хармонијску четворку тачака зваћемо **хармонијско пресликавање** [67]. Дакле, хармонијско пресликавање је бијекција која чува хармонијску конјугованост, а основни примери су пројективитети (Теорема 3.44) и колинеације (Теорема 4.1).

Нека је h хармонијско пресликавање аналитичке пројективне праве $\mathbb{P}^1$ на саму себе. По Основној теорему пројективитета, пројективитет је једнозначно одређен са три пара одговарајућих тачака, те нека је g пројективитет који се поклапа са h на неке три различите тачке. Ако се h разликује од g можемо посматрати $g^{-1} \circ h$, што је такође хармонијско пресликавање, али оно фиксира три различите тачке. Постоји ли неидентичко хармонијско пресликавање које фиксира три различите тачке?

Да бисмо одговорили на ова питања користимо дехомогенизацију $*$: $\mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{\mathbb{F}}$ која од хармонијског h : $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ прави $h^* = * \circ h \circ *^{-1}$: $\bar{\mathbb{F}} \rightarrow \bar{\mathbb{F}}$. Претпоставимо да h фиксира основне тачке, односно да h^* фиксира ∞ , 0 и 1. Како је h^* бијекција која фиксира ∞ , то је f : $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ дефинисано са $f = h^*|_{\mathbb{F}}$ бијекција за коју је $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

Компликације у строго формалном запису можемо смањити тако што елемент $a \in \bar{\mathbb{F}}$ поистовестимо са тачком $*^{-1}(a)$. На тај начин $a \in \mathbb{F}$ представља тачку са хомогеним координатама $(a : 1)$, док је ∞ заправо тачка $(1 : 0)$. По Лему 3.47, тачка која је хармонијски конјугована бесконачној у односу на неки пар тачака је аритметичка средина тог пара, те за произвољне различите $x, y \in \mathbb{F}$ имамо

$$\mathcal{H}\left(x, y; \frac{x+y}{2}, \infty\right).$$

Примена хармонијског пресликавања h , за које је $h(\infty) = \infty$, даје

$$\mathcal{H}\left(f(x), f(y); f\left(\frac{x+y}{2}\right), \infty\right),$$

што новом применом Леме 3.47, за $x, y \in \mathbb{F}$ даје

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Посебно, за $y = 0$ имамо

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)}{2},$$

што у сарадњи са претходном једначином показује да је f морфизам у односу на сабирање. Закључујемо да за свако $x, y \in \mathbb{F}$ важи

$$f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (4.1)$$

Посебно, за $y = -x$ имамо $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$, одакле следи $f(-x) = -f(x)$.

Како рачун за дворазмеру даје

$$(-x, x, 1, x^2) = \frac{-x-1}{-x-x^2} \frac{x-x^2}{x-1} = -1,$$

то по Теорему 3.46 важи $\mathcal{H}(-x, x; 1, x^2)$. Примена хармонијског пресликавања h даје $\mathcal{H}(f(-x), f(x); f(1), f(x^2))$, односно $\mathcal{H}(-f(x), f(x); 1, f(x^2))$, али како је већ $\mathcal{H}(-f(x), f(x); 1, (f(x))^2)$, то по Теорему 3.42 имамо $f(x^2) = (f(x))^2$. Додатно расписивање уз коришћење претходне формуле даје

$$\begin{aligned} f((x+y)^2) &= (f(x+y))^2 = (f(x) + f(y))^2 = (f(x))^2 + 2f(x)f(y) + (f(y))^2, \\ f((x+y)^2) &= f(x^2 + 2xy + y^2) = f(x^2) + f(2xy) + f(y^2) = (f(x))^2 + 2f(xy) + (f(y))^2, \end{aligned}$$

одакле је f морфизам у односу на множење. Дакле, за свако $x, y \in \mathbb{F}$ важи

$$f(xy) = f(x)f(y). \quad (4.2)$$

Хармонијско пресликавање узроковало је да f мора бити морфизам како у односу на сабирање (формула (4.1)), тако и у односу на множење (формула (4.2)), што значи да је f аутоморфизам поља $\mathbb{F}$. Да ли постоји аутоморфизам поља $\mathbb{F}$ различит од 1 ?

У случају комплексне пројективне равни, $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, знамо да важи $\bar{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ и $\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, тако да је конјугат $x \mapsto \bar{x}$ аутоморфизам поља $\mathbb{C}$ различит од 1 . Нека је f бијекција комплексне пројективне равни на саму себе која мења комплексне бројеве њиховим конјугатима, $(z_1 : z_2 : z_3) \mapsto (\bar{z}_1 : \bar{z}_2 : \bar{z}_3)$. Тада је инциденција између тачке $(x_1 : x_2 : x_3)$ и праве $[u_1 : u_2 : u_3]$ одређена условом $x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$, што је даље еквивалентно услову $\bar{x}_1 \bar{u}_1 + \bar{x}_2 \bar{u}_2 + \bar{x}_3 \bar{u}_3 = 0$, одакле следи да f чува инциденцију, те је зато колинеација. Права $p = [0 : 0 : 1]$ је фиксна права, која је инцидентна са три фиксне тачке $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ и $(1 : 1 : 0)$, те ако је $f|_p$ пројективитет по Основној теореми пројективитета мора бити $f|_p = 1$. Међутим, p је инцидентна са $(i : 1 : 0)$ које се слика у $(-i : 1 : 0) \neq (i : 1 : 0)$, што је контрадикција. Дакле, у комплексној пројективној равни постоји колинеација која није пројективна колинеација.

Теорема 4.10. У комплексној пројективној равни конјугац и индукује колинеацију која није пројективна колинеација.

Вратимо се на аутоморфизам поља $\mathbb{F}$, који у почетку има $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$, а затим даје $f(n) = n$ за све природне $n \in \mathbb{N}$. То се даље продужава на целе бројеве $\mathbb{Z}$ због $f(-n) = -f(n)$, те коначно и на рационалне бројеве $\mathbb{Q}$ због $f(m/n)f(n) = f(m)$. Дакле, аутоморфизам поља f фиксира све рационалне бројеве. Самим тим, свака колинеација рационалне пројективне равни је пројективна колинеација.

Размотримо сада најважнији случај $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, случај реалне пројективне равни. Кључни мотив је особина да је реалан број позитиван ако је квадрат неког броја који није нула, а како важи $f(x^2) = (f(x))^2$, то f преводи позитивне бројеве у позитивне. Ако f не фиксира неко $a \in \mathbb{R}$, односно важи $f(a) \neq a$, тада је $a < f(a)$ или $a > f(a)$. Претпоставимо да је $a < f(a)$. Како су рационални бројеви густе у реалним то постоји $q \in \mathbb{Q}$ тако да је $a < q < f(a)$. Међутим, $q - a > 0$ повлачи $f(q - a) > 0$, али $f(q - a) = f(q) - f(a) = q - f(a) < 0$ што је контрадикција. Сасвим слично се изводи контрадикција у случају $a > f(a)$. Можемо закључити да је једини аутоморфизам поља $\mathbb{R}$ идентичко пресликавање и отуда следећа теорема.

Теорема 4.11. Свака колинеација реалне пројективне равни је пројективна колинеација.

Захваљујући Теорему 4.4, свака пројективна колинеација реалне пројективне равни, самим тим и свака колинеација (Теорема 4.11), једнозначно се задаје са два четворотеменика. Четворотеменик $ABCD$ одређује координатни систем тако што вектори $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$, као линеарно независни (јер су тачке A, B, C неколинеарне) чине базу простора $\mathbb{R}^3$, а ради једноставности их бирамо да нормирамо $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. Сасвим слично други координатни систем је задат четворотемеником $A'B'C'D'$, са нормираним $\vec{D}' = \vec{A}' + \vec{B}' + \vec{C}'$. Ако изразимо нове базне векторе преко старих добијамо матрицу преласка M са старе базе на нову: $(\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}') = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})M$. Пошто M преводи базе у питању је регуларна квадратна матрица реда три.

Ако са $X = (x_1, x_2, x_3)$ означимо координате вектора представника неке тачке у старом координатном систему, док са $X' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ означимо координате вектора те исте тачке у новом координатном систему, то је $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})X = (\vec{A}', \vec{B}', \vec{C}')X'$, одакле следи $X = MX'$. Веза између старих и нових координата је једна регуларна матрица. Као и раније, активни приступ такође (попут већ разматраног пасивног приступа)

има за везу регуларну матрицу, што значи да су колинеације реалне пројективне равни заправо индуковане регуларним матрицама реда три.

Теорема 4.12. *Колинеација реалне пројективне равни је индукована регуларном линеарном трансформацијом.*

Веза између старих координата X и нових координата X' дата је са $X = MX'$, где је M регуларна матрица. Природно се поставља питање како се пресликавају праве при тој колинеацији. Вектори представници X тачака са праве $p = [U]$ описане су једначином $U^T X = 0$. Из $X = MX'$ добијамо $U^T M X' = 0$, што представља једначину нове праве $U'^T X' = 0$, одакле следи $\lambda U'^T = U^T M$. Транспоноване даје $\lambda U' = (U^T M)^T = M^T U$, што доказује наредну теорему.

Теорема 4.13. *Ако колинеација реалне пројективне равни пресликава тачке формулом $X' = PX$, онда она пресликава праве са $U' = (P^{-1})^T U$.*

По Теорему 4.13 ако перспективна колинеација пресликава тачке везом $X' = PX$, за неку регуларну матрицу P , онда се праве сликају везом $U = P^T U'$. Противоса је права која се слика у $[0 : 0 : 1]$, тако да противосу представља последња трећа врста матрице пресликавања P . Матрица афиног пресликавања зато мора имати нуле на прва два места у последњој врсти.

Пример 4.19. Тачке $A_1(4 : 1 : 1)$, $A_2(4 : 4 : 1)$, $A_3(0 : 4 : 1)$, $B(2 : 1 : 1)$ узете су за базне тачке новог координатног система. Одредити формуле трансформација координата из старих у нове.

Формуле трансформација су линеарне, а одговарајућу матрицу добијамо из веза $(4 : 1 : 1) \mapsto (1 : 0 : 0)$, $(4 : 4 : 1) \mapsto (0 : 1 : 0)$, $(0 : 4 : 1) \mapsto (0 : 0 : 1)$, $(2 : 1 : 1) \mapsto (1 : 1 : 1)$. Добијамо

$$\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 = 4a_{11} + a_{12} + a_{13} & 0 = 4a_{21} + a_{22} + a_{23} & 0 = 4a_{31} + a_{32} + a_{33} \\ 0 = 4a_{11} + 4a_{12} + a_{13} & \lambda_2 = 4a_{21} + 4a_{22} + a_{23} & 0 = 4a_{31} + 4a_{32} + a_{33} \\ 0 = & 4a_{12} + a_{13} & 0 = 4a_{22} + a_{23} & \lambda_3 = 4a_{32} + a_{33} \\ \hline \lambda_4 = 2a_{11} + a_{12} + a_{13} & \lambda_4 = 2a_{21} + a_{22} + a_{23} & \lambda_4 = 2a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{array}$$

те преостаје решити систем 12 једначина са 13 непознатих. Згодно је систем решити елиминацијом параметара $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, док се у општем случају можемо ослонити на Крамерову методу детерминанти. Основна детерминанта за прве три везе је

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12,$$

док су помоћне детерминанте

$$\begin{array}{c|c|c} D_{11} = 0 & D_{21} = 3\lambda_2 & D_{31} = -3\lambda_3 \\ D_{12} = -4\lambda_1 & D_{22} = 4\lambda_2 & D_{23} = 0 \\ D_{13} = 16\lambda_1 & D_{23} = -16\lambda_2 & D_{33} = 12\lambda_3 \end{array}$$

где је $a_{ij} = D_{ij}/D$. Заменом у последњу везу имамо

$$\begin{aligned} 12\lambda_4 &= 0 - 4\lambda_1 + 16\lambda_1 = 12\lambda_1 \\ 12\lambda_4 &= 6\lambda_2 + 4\lambda_2 - 16\lambda_2 = -6\lambda_2 \\ 12\lambda_4 &= -6\lambda_3 + 0 + 12\lambda_3 = 6\lambda_3, \end{aligned}$$

одакле је $\lambda_1 = \lambda_4$, $\lambda_2 = -2\lambda_4$, $\lambda_3 = 2\lambda_4$. Тражена матрица је

$$A = \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & -4 & 16 \\ -6 & -8 & 32 \\ -6 & 0 & 24 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 \\ -3 & -4 & 16 \\ -3 & 0 & 12 \end{pmatrix},$$

при чему је $\lambda X' = AX$.

△

Пример 4.20. Дате су тачке $A(1 : 1 : 0)$, $B(1 : 3 : 2)$, $C(1 : 0 : 1)$, $D(1 : 2 : 1)$, $E(0 : 0 : 1)$ и праве $p: 2x_2 + x_3 = 0$ и $q: x_3 = 0$. Одредити формуле колинеације f за коју је $f(A) = B$, $f(C) = D$, $f(E) = E$ и $f(p) = q$.

Формуле колинеације су $\lambda X' = MX$, а из датих услова одређујемо матрицу

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

Услов $f(E) = E$ даје $m_{13} = m_{23} = 0$. Колинеација слика праве са $\lambda U = M^T U'$, те из $f(p) = q$ важи $\vec{p} \propto M^T \vec{q}$. Како је $p = [0 : 2 : 1]$ и $q = [0 : 0 : 1]$ имамо $(m_{31}, m_{32}, m_{33}) \propto (0, 2, 1)$, односно $m_{31} = 0$ и $m_{32} = 2m_{33}$, тако да за сада имамо облик

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 \\ 0 & 2m_{33} & m_{33} \end{pmatrix}.$$

Примена $f(C) = D$ даје $M\vec{C} = (m_{11}, m_{21}, m_{33}) \propto (1, 2, 1) = \vec{D}$, одакле је $m_{21} = 2m_{11}$, $m_{33} = m_{11}$. Услов $f(A) = B$ даје $M\vec{A} = (m_{11} + m_{12}, 2m_{11} + m_{22}, 2m_{11}) \propto (1, 3, 2) = \vec{B}$, одакле је $2m_{11} = 2(m_{11} + m_{12})$ и $2m_{11} + m_{22} = 3(m_{11} + m_{12})$, односно $m_{12} = 0$ и $m_{22} = m_{11}$. Сви елементи матрице M су изражени преко $m_{11} \neq 0$, те добијамо формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

тражене колинеације. △

Пример 4.21. Дате су тачке $A(1 : 1 : 1)$, $B(0 : -1 : 1)$, $C(2 : 1 : 1)$, $D(0 : 5 : 1)$ и праве $p: x_1 = 0$, $q: x_2 = 0$ и $r: x_2 = x_3$. Одредити матрицу колинеације f за коју је $f(p) = q$, $f(q) = r$, $f(A) = B$ и $f(f(C)) = D$.

Тражимо матрицу M за коју важи $X' \propto MX$, односно $U \propto M^T U'$. Из услова $p[1 : 0 : 0] \mapsto q[0 : 1 : 0]$ следи $m_{22} = m_{23} = 0$, док из $q[0 : 1 : 0] \mapsto r[0 : 1 : -1]$ добијамо $m_{21} = m_{31}$ и $m_{23} = m_{33}$, те долазимо до матрице облика

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{31} & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из $A(1 : 1 : 1) \mapsto B(0 : -1 : 1)$ је $(m_{11} + m_{12} + m_{13}, m_{31}, m_{31} + m_{32}) \propto (0, -1, 1)$, одакле добијамо $m_{13} = -m_{11} - m_{12}$ и $m_{32} = -2m_{31}$. Даље рачунамо

$$\vec{f(C)} \propto M\vec{C} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & -m_{11} - m_{12} \\ m_{31} & 0 & 0 \\ m_{31} & -2m_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ 2m_{31} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f(f(C))} \propto M\vec{f(C)} \propto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & -m_{11} - m_{12} \\ m_{31} & 0 & 0 \\ m_{31} & -2m_{31} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ 2m_{31} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11}^2 + 2m_{12}m_{31} \\ m_{11}m_{31} \\ m_{11}m_{31} - 4m_{31}^2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Одавде је $m_{11}^2 + 2m_{12}m_{31} = 0$, $m_{31} \neq 0$ и $m_{11}m_{31} = 5(m_{11}m_{31} - 4m_{31}^2)$, одакле добијамо $m_{11} = 5m_{31}$, те $2m_{12} = 25m_{31}$, односно

$$M \propto \begin{pmatrix} 10 & 25 & -35 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

кад матрицу нормирамо са $m_{31} = 2$. △

Пример 4.22. Дате су тачке $A(1 : 1 : 1)$, $B(1 : 2 : 3)$, и праве $p: x_1 = 0$, $q: x_2 = 0$, $r: x_1 = x_3$. За колинеацију f важи $f(p) = p$, $f(q) = r$, $f(A) = B$, $f(B) = C$. Одредити матрице свих колинеација f уколико је а) $C(2 : 3 : 1)$; б) $C(1 : 3 : 5)$.

Ако је

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

тражена матрица колинеације f , онда она пресликава тачке са $\lambda X' = MX$, а праве са $\lambda U = M^T U'$. Услов $f(p) = p$ је заправо $[1 : 0 : 0] \mapsto [1 : 0 : 0]$, што даје $m_{12} = m_{13} = 0$. услов $f(q) = r$ је $[0 : 1 : 0] \mapsto [-1 : 0 : 1]$, одакле добијамо $m_{31} = m_{11}$ и $m_{33} = 0$. Добили смо матрицу облика

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{11} & m_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

и примењујемо је на тачке. Из $f(A) = B$ следи $m_{21} + m_{22} + m_{23} = 2m_{11}$ и $m_{11} + m_{32} = 3m_{11}$, односно $m_{32} = 2m_{11}$ и $m_{21} = 2m_{11} - m_{22} - m_{23}$. Даље је

$$\vec{C} \propto M\vec{B} \propto \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 2m_{11} - m_{22} - m_{23} & m_{22} & m_{23} \\ m_{11} & 2m_{11} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \\ 2m_{11} + m_{22} + 2m_{23} \\ 5m_{11} \end{pmatrix}.$$

Видимо да је немогуће $\vec{C} \propto (2, 3, 1)$, те задатак под а) нема решења. Задатак под б) даје додатни услов $\vec{C} \propto (1, 3, 5)$ одакле добијамо $2m_{11} + m_{22} + 2m_{23} = 3m_{11}$, односно $m_{22} = m_{11} - 2m_{23}$. То нас доводи до колинеација са матрицом

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{11} + m_{23} & m_{11} - 2m_{23} & m_{23} \\ m_{11} & 2m_{11} & 0 \end{pmatrix}$$

где је очигледно $m_{11} \neq 0$ и $m_{23} \neq 0$ због $\det M \neq 0$. △

4.5 Фиксни елементи колинеације

Колинеација аналитичке пројективне равни $\mathbb{RP}^2$ је по Теорему 4.12 индукована регуларном линеарном трансформацијом. Као у случају пројективитета, проблем налажења фиксних тачака еквивалентан је проблему налажења свих сопствених вектора матрице A , а у питању су вектори представници фиксних тачака. Разлика је у томе што је сада матрица A реда три,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

те је карактеристични полином $\chi_A(\lambda)$ једнак

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \operatorname{tr} A \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2}((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)) \cdot \lambda + \det A.$$

Фиксне тачке репрезентују сопствени вектори матрице A . По Теорему 4.13 ако за тачке важи $X' = AX$, то је за праве $U' = (A^{-1})^T U$, односно $U = A^T U'$, те фиксне праве

добиамо као сопствене векторе матрице A^T . Како транспоноване матрице имају исти карактеристични полином, то фиксне тачке и фиксне праве можемо паралелно разматрати.

Пре неголи се упустимо у конкретне примере колинеација, напомнимо да облик матрице зависи од избора координатног система. Ако је P матрица преласка, за нове координате Y важи $X = PY$, док колинеација дата формулом $X' = AX$, у новом координатном систему добија формулу $Y' = P^{-1}X' = P^{-1}AX = P^{-1}APY$. Матрица колинеације у новом систему је $A' = P^{-1}AP$, што говори да сличне матрице A и A' имају исти геометријски смисао.

Карактеристични полином $\chi_A(\lambda)$ има три нуле, али оне не морају нужно бити реалне. Уколико матрица A има комплексну сопствену вредност λ , тада постоји комплексан вектор X такав да је $(A - \lambda \mathbb{1})X = 0$. Конјуговањем свих инстанци директно добијамо $(A - \bar{\lambda} \mathbb{1})\bar{X} = 0$ јер се матрице са реалним улазима не мењају. Дакле, уколико је λ нула карактеристичног полинома, онда је то и њен конјугат $\bar{\lambda}$. Вектор X у том случају не може бити реалан јер би био сопствени и за λ и за $\bar{\lambda}$, што је у супротности са Лемом А.1.

Како је матрица A непарног реда, а комплексне сопствене вредности иду у паровима, то она мора имати барем једну реалну сопствену вредност, самим тим барем један реалан сопствени вектор. Тако закључујемо да свака колинеација у $\mathbb{R}P^2$ мора имати барем једну фиксну тачку као и барем једну фиксну праву.

Започнимо дискусију по различитим нулама карактеристичног полинома. Ако су све три нуле реалне и различите, свакој од њих одговара једнодимензиони сопствени потпростор, те имамо тачно три фиксне тачке чији су вектори представници линеарно независни (Лема А.1), те су оне неколинеарне (Лема 3.13). Сасвим слично имамо и тачно три неконкурентне фиксне праве, а геометријски оне су спојнице фиксних тачака.

Ако су све три нуле различите, а нису све реалне, то имамо пар конјугованих комплексних нула и једну реалну. Реална нула даје једну фиксну тачку и то је све. Сасвим слично, имамо и тачно једну фиксну праву. Геометријски различите комплексне нуле дају и комплексне фиксне тачке чија ће спојница бити та реална фиксна права. Дакле, у питању су једна фиксна тачка и једна фиксна права, док оне међусобно нису инцидентне.

Наредна могућност је једна једнострука и једна двострука реална нула. Једнострука реална нула даје фиксну тачку која је независна од осталих (Лема А.1) које зависе од двоструке реалне нуле λ . За $\text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 1$ имамо $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 2$, тако да су фиксне тачке на правој која није инцидентна са већ постојећом фиксном тачком, што је хомологија. За $\text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 2$ имамо $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 1$ и тачно једну фиксну тачку која тој нули одговара. Дакле, имамо тачно две фиксне тачке и тачно две фиксне праве при чему је једна од њих управо спојница фиксних тачака.

Последња могућност је трострука реална нула, те дискусија одлучује о димензији сопственог потпростора. За $\text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$ имамо $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 3$, што је идентичко пресликавање. За $\text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 1$ имамо $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 2$, те и тачка по тачка фиксну праву, што је елација. У случају $\text{rang}(A - \lambda \mathbb{1}) = 2$ имамо $\dim(\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})) = 1$, што даје једну фиксну тачку и једну фиксну праву, али овога пута оне су зависне јер одговарају истој сопственој вредности, односно оне су инцидентне.

Што се тиче најједноставнијих примера, најзгодније је користити нормалну форму, односно блок дијагоналне матрице. Кад сопствени потпростор не достиже максималну димензију, можемо користити Жорданове³ блокове, а за комплексне нуле блок који смо видели у елиптичком пројективитету. Неке конкретне примере наводимо у наредној табели.

³Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), француски математичар

колинеација	фиксне тачке	пример
тачка ван праве	1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
тачка на правој	1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
две тачке и две праве	2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
фиксни тротеменик	3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
хомологија	∞	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
елација	∞	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
идентичко	∞	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Пример 4.23. Одредити фиксне тачке и фиксне праве колинеације $\lambda x'_1 = 4x_1 - x_2$, $\lambda x'_2 = 6x_1 - 3x_2$, $\lambda x'_3 = x_1 - x_2 - x_3$. Колинеација је дата системом једначина $\lambda X' = AX$ чија је матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рачунамо карактеристични полином

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3 - \lambda & 0 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 6(-1 - \lambda),$$

те добијамо $\chi_A(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda - 12 + 6) = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$. Како имамо три различите реалне сопствене вредности свака понаособ даје по једну фиксну тачку. Тражимо сопствене векторе матрице A , односно такве X за које важи $(A - \lambda \mathbb{1})X = 0$, где је $\lambda \in \{-1, -2, 3\}$.

За $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ даје фиксну тачку $(0 : 0 : 1)$.

За $\lambda = -2$ је $\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ даје фиксну тачку $(1 : 6 : 5)$.

За $\lambda = 3$ је $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -6 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ даје фиксну тачку $(1 : 1 : 0)$.

Колинеација има тачно три фиксне тачке: $T_1(0 : 0 : 1)$, $T_2(1 : 6 : 5)$, $T_3(1 : 1 : 0)$. Слично, фиксне праве одговарају сопственим векторима транспоноване матрице A^T , која има исти карактеристични полином. Можемо их рачунати као раније.

За $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ даје праву $[1 : -1 : 1]$. Међутим, фиксне праве су спојнице фиксних тачака, где је добијено $[1 : -1 : 1]$ управо $T_2 \vee T_3$, док су преостале фиксне праве $T_1 \vee T_3 = [1 : -1 : 0]$ и $T_1 \vee T_2 = [-6 : 1 : 0]$. $\triangle$

Пример 4.24. Колинеација је дата са $\lambda x'_1 = x_2 + x_3$, $\lambda x'_2 = x_1 + x_3$, $\lambda x'_3 = x_1 + x_2$. Доказати да је у питању хомологија, те одредити центар и осу. Одредити неки координатни систем у чијим је афиним координатама та колинеација хомотетија са центром у тачки $(0 : 0 : 1)$.

Колинеација је дата системом једначина $\lambda X' = AX$, где је матрица колинеације

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рачунамо карактеристични полином

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2).$$

За $\lambda = -1$ је $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, што важи за $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, односно осу $[1 : 1 : 1]$.

За $\lambda = 2$ је $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, те $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ даје центар $(1 : 1 : 1)$.

Како важи $(1 : 1 : 1) \notin [1 : 1 : 1]$, то је у питању хомологија. Хомотетија осим центра хомотетије фиксира и све бесконачне тачке. Променом координатног система желимо обезбедити да оса буде бесконачна права, а да центар постане $(0 : 0 : 1)$. Матрицу преласка попуњавамо у складу са условима. Њена прва и друга колона одговарају бесконачним тачкама $(1 : 0 : 0)$ и $(0 : 1 : 0)$, тако да је ту неопходно уписати неке векторе представнике за две тачке са осе, на пример $(1, 0, -1)$ и $(1, -1, 0)$. Трећа колона одговара тачки $(0 : 0 : 1)$, те ту уписујемо вектор представник центра. Односе између наведених вектора представника можемо варирати тако да решење свакако није једнозначно, а једно решење је матрица преласка

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Њен инверз је матрица

$$M^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

док матрица колинеације у новом систему гласи

$$\begin{aligned} M^{-1}AM &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

што очигледно испуњава услове задатка. $\triangle$

Пример 4.25. Одредити фиксне тачке и фиксне праве колинеације која је дата формулама $\lambda x'_1 = 10x_1 + 6x_2 - 6x_3$, $\lambda x'_2 = -3x_1 + x_2 + 3x_3$, $\lambda x'_3 = 3x_1 + 3x_2 + x_3$. Изабрати координатни систем у којем је колинеација афина тако да је тачка $(0 : 0 : 1)$ бесконачна и написати формуле колинеације у новим координатама.

Матрица колинеације је

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Након краћег рачуна добијамо $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = -(\lambda - 4)^3$, те је једина сопствена вредност 4 (трострука нула). Из једначина $(A - 4\mathbb{1})X = 0$ и $(A^T - 4\mathbb{1})X = 0$ добијамо фиксне тачке $\{(a : b : a + b) : a^2 + b^2 \neq 0\}$, док су $\{[a : b : b - 2a] : a^2 + b^2 \neq 0\}$ фиксне праве, те је у питању елација са центром $(2 : -1 : 1)$ и осом $[1 : 1 : -1]$. Афина колинеација има бесконачну праву за фиксну праву, а како желимо да тачка $(0 : 0 : 1)$ буде бесконачна, то она мора бити на оригиналној фиксној правој. Из скупа решења фиксних правих узимамо ону која садржи нашу тачку, а то је права $[1 : 2 : 0]$. У прве две колоне матрице преласка M уписаћемо две тачке са те праве, на пример $(2 : -1 : 0)$ и $(0 : 0 : 1)$, а у трећу било шта тако да важи $\det M \neq 0$, на пример $(1 : 0 : 0)$. Тако добијамо

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

док је матрица колинеације у новом систему

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 6 & -6 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Напоменимо да афина колинеација мора имати нуле на прва два места у последњој врсти њене матрице, што нам даје један вид контроле да смо последњу матрицу добро израчунали. $\triangle$

Пример 4.26. Нека је колинеација дата формулама $\lambda x'_1 = -2x_1 - x_2 - x_3$, $\lambda x'_2 = x_1 + x_3$, $\lambda x'_3 = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3$. Изабрати координатни систем у којем је колинеација афина тако да је тачка $(0 : 0 : 1)$ бесконачна. Написати формуле колинеације у новим координатама.

Овај задатак је сасвим сличан Задатку 4.25. Матрица колинеације је

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Најпре рачунамо карактеристични полином $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$. Сопствени вектори за вредност $\lambda = -1$ дају тачка по тачка фиксну праву $[1 : 1 : 1]$, док за вредност $\lambda = 2$ дају фиксну тачку $(-1 : 1 : 3)$. Дакле, у питању је хомологија са осом $[1 : 1 : 1]$ и центром $(-1 : 1 : 3)$. Афина колинеација има фиксну бесконачну праву, а приде захтевамо да тачка $(0 : 0 : 1)$ постане бесконачна. Да бисмо ово остварили неопходно је да пронађемо фиксну праву која садржи $(0 : 0 : 1)$. То можемо урадити тражећи сопствене векторе матрице A^T , али како смо закључили да је у питању хомологија, тражена фиксна права је $[1 : 1 : 0]$ као спојница тачке $(0 : 0 : 1)$ и центра $(-1 : 1 : 3)$. У прве две колоне матрице преласка уписујемо векторе представнике за две тачке са те праве, на пример $(0 : 0 : 1)$ (добро је узети баш њу да би се јасно видело да постаје бесконачна) и $(-1 : 1 : 0)$, док је трећа произвољна тако

да детерминанта не буде нула, на пример $(1 : 0 : 0)$ (пожељно је имати што више нула). Тако добијамо

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

док је

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица колинеације у новом систему. $\triangle$

Пример 4.27. Колинеација је дата формулама $\lambda x'_1 = 5x_1 - 3x_2 - x_3$, $\lambda x'_2 = -3x_1 + 5x_2 + x_3$, $\lambda x'_3 = 2x_1 - 2x_2 + 4x_3$. Одредити све фиксне праве колинеације, а затим изабрати координатни систем у којем је та колинеација афина, те написати формуле у новим координатама.

Матрица колинеације је

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рачунамо $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = -(\lambda^3 - 14\lambda^2 + 60\lambda - 72) = -(\lambda - 2)(\lambda - 6)^2$. Фиксне праве тражимо као сопствене векторе транспоноване матрице.

$$\text{За } \lambda = 2 \text{ је } (A^T - 2\mathbb{1})U = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ што даје } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{За } \lambda = 6 \text{ је } (A^T - 6\mathbb{1})U = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ што даје } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Дакле, постоје две фиксне праве, $[1 : 1 : 0]$ и $[-1 : 1 : 1]$. Афина колинеација има бесконачну праву фиксну, те бирамо једну од пронађених, на пример $[1 : 1 : 0]$, а затим са ње две произвољне тачке, на пример $(0 : 0 : 1)$ и $(1 : -1 : 0)$, чије векторе представнике уписујемо у прве две колоне матрице преласка. Трећу колону попуњавамо произвољно, али да матрица буде регуларна. Једна од много могућности је

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

док је матрица колинеације у новом систему

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Прва два улаза у последњој врсти нове матрице су нуле, што значи да је добијена колинеација афина. $\triangle$

Пример 4.28. Одредити матрицу хомологије која је одређена центром $S(-1 : 1 : 3)$, осом $s: x_1 + x_2 + x_3 = 0$ и противосом $u: 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0$.

Противоса се реализује дуж треће врсте, тако да можемо одмах у њу уписати $(3, 3, 2)$ или нешто сразмерно том вектору,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Све тачке са осе $[1 : 1 : 1]$ су фиксне, тако да ћемо издвојити неке лаке за рачун (што више нула то боље) попут $(-1 : 0 : 1)$ и $(0 : -1 : 1)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} - a_{11} \\ a_{23} - a_{21} \\ -1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ одакле је } a_{11} = a_{13} - 1,$$

$$a_{21} = a_{23}.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} - a_{12} \\ a_{23} - a_{22} \\ -1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ одакле имамо } a_{12} = a_{13},$$

$$a_{22} = a_{23} - 1.$$

Можемо одмах уврстити $a_{13} = x$, $a_{12} = x$, $a_{11} = x - 1$, односно $a_{23} = y$, $a_{22} = y - 1$, $a_{21} = y$, те искористити услов да је S фиксна тачка.

$$\begin{pmatrix} x-1 & x & x \\ y & y-1 & y \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+1 \\ 3y-1 \\ 6 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ одакле је } 3x+1 = -2,$$

$3y-1 = 2$, односно $x = -1$, $y = 1$. Тражена хомологија има матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

За крај, довољно је проверити да је још једна тачка са $[1 : 1 : 1]$ фиксна, на пример $(-1 : 1 : 0)$, чиме бисмо обезбедили да $[1 : 1 : 1]$ буде оса, а $S(-1 : 1 : 3)$ фиксна тачка. Како колинеација дата матрицом A није идентитет она мора бити хомологија са траженим особинама. $\triangle$

Пример 4.29. Наћи формуле колинеације која праве $a: x = 0$, $b: y = 0$, $c: x + y = 1$ пресликава редом на b, c, a , док тежиште троугла којем стране припадају тим правима пресликава у пресек правих $x - y = 0$ и $x - y = 2$. Која права се слика у бесконачну? Шта је слика круга описаног око тог троугла?

Ако колинеација има матрицу M , она слика тачке са $\lambda X' = MX$, а праве са $\lambda U = M^T U'$. Хомогене координате правих су $a[1 : 0 : 0]$, $b[0 : 1 : 0]$, $c[1 : 1 : -1]$, тежиште троугла је $T(1/3 : 1/3 : 1) = (1 : 1 : 3)$ и оно се слика у $T'(1 : 1 : 0)$. Компликације око правих избегавамо њиховим сециштима $C = a \wedge b = (0 : 0 : 1)$, $A = b \wedge c = (1 : 0 : 1)$, $B = c \wedge a = (0 : 1 : 1)$, након чега користимо формуле само за тачке $C \mapsto A \mapsto B \mapsto C$, $T \mapsto T'$. Међутим, некада колинеацију није могуће одредити само помоћу слика тачака, те овај задатак радимо директно.

Из $a[1 : 0 : 0] \mapsto b[0 : 1 : 0]$ имамо $m_{22} = m_{23} = 0$. Из $b[0 : 1 : 0] \mapsto c[1 : 1 : -1]$ добијамо $m_{11} + m_{21} - m_{31} = m_{13} + m_{23} - m_{33} = 0$, одакле следи $m_{31} = m_{11} + m_{21}$ и $m_{33} = m_{13}$. Из $c[1 : 1 : -1] \mapsto a[1 : 0 : 0]$ је $m_{11} = m_{12} = -m_{13}$, тако да матрица има облик

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 0 & 0 \\ m_{11} + m_{21} & m_{32} & -m_{11} \end{pmatrix}.$$

Кад уврстимо $\vec{T'} \propto M\vec{T}$ добијамо

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{11} & -m_{11} \\ m_{21} & 0 & 0 \\ m_{11} + m_{21} & m_{32} & -m_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{11} \\ m_{21} \\ m_{21} + m_{32} - 2m_{11} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

одакле је $-m_{11} = m_{21}$, $m_{21} + m_{32} - 2m_{11} = 0$, што коначно даје

$$M \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Множењем матрице M са $\vec{u}_\infty = (0, 0, 1)$ добијамо противосу $u[0 : 3 : -1]$, односно праву $u = 1/3$. Како та права сече круг у двама тачкама, то се он слика у хиперболу. $\triangle$

Пример 4.30. Одговарајућом матрицом одредити све могуће колинеације које имају тачно две фиксне тачке $(0 : 0 : 1)$ и $(-1 : 0 : 2)$, фиксирају праву $2x_1 + x_3 = 0$, док праву $3x_2 + x_3 = 0$ пресликавају у праву $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Како је $(0 : 0 : 1)$ фиксна тачка то имамо $m_{13} = 0$ и $m_{23} = 0$, а како је и $(-1 : 0 : 2)$ фиксна то добијамо $m_{21} = 0$ и $2m_{11} = 2m_{33} - m_{31}$. Фиксна права $[2 : 0 : 1]$ доноси $m_{32} = -2m_{12}$ и већ виђено $2m_{11} = 2m_{33} - m_{31}$, док $[0 : 3 : 1] \mapsto [1 : 1 : 1]$ даје $m_{31} = -m_{11}$ и $m_{12} + m_{22} + m_{32} = 3m_{33}$. Одавде закључујемо да је матрица колинеације

$$M \propto \begin{pmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & 3a + b & 0 \\ -2a & -2b & a \end{pmatrix}.$$

Добили смо облик свих колинеација које пресликавају све што треба, али преостаје неискоришћен услов да колинеација има тачно две фиксне тачке. У том случају неопходно је да матрица има тачно две сопствене вредности, док су наше сопствене вредности a , $2a$ и $3a + b$. Како је $2a \neq a \neq 0$ због $\det M \neq 0$, то дискутујемо два случаја. У првом случају је $3a + b = 2a$, односно $b = -a$, што нас доводи до матрице

$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

која за сопствену вредност 2 има једнодимензиони сопствени потпростор којем одговара фиксна тачка $(-1 : 0 : 2)$ и зато јесте решење. У другом случају је $3a + b = a$, односно $b = -2a$, што нас доводи до матрице

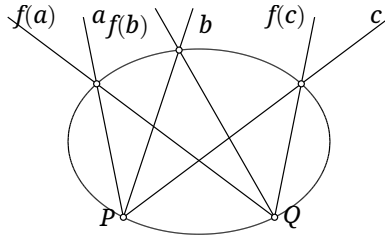
$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

која за сопствену вредност 1 има дводимензиони сопствени потпростор којем одговара оса $[1 : -2 : 0] \ni (2 : 1 : 0)$ и зато није решење. $\triangle$

КОНИКЕ

5.1 Конике Папосове равни

Конике се могу дефинисати на више различитих начина, који су углавном еквивалентни, а ми их уводимо у Папосовој равни, односно подразумевамо да важе Аксиоме 2.1, 2.2, 2.3 и 3.1. Користимо пројективитет између праменова правих и тако постављамо **Шпјајнерову дефиницију** [72] на следећи начин. Нека је $f: (P) \rightarrow (Q)$ пројективитет успостављен између праменова правих у Папосовој равни. **Коника** је скуп свих тачака које су инцидентне и са неком правом домена пројективитета и са њеном сликом, $\Gamma = \{X \in (p) \cap (f(p)) : p \in (P)\}$. За конику кажемо да је **дегенерисана** ако је $P \neq Q$ и f није перспективитет.



Ако је коника Γ одређена пројективитетом f то краће обележавамо са $f = (P) \rightarrow (Q)$. Свака права $p \in (P)$ која није сопствена слика доноси као тачку криве сециште $p \wedge f(p) \in \Gamma$, док за $f(p) = p$ имамо $(p) \subseteq \Gamma$. Носиоци праменова свакако припадају коници, што очигледно важи за $P = Q$, док се за $P \neq Q$ права $P \vee Q$ слика у праву прамена (Q) и даје $Q \in \Gamma$, док је инверзна слика од $Q \vee P$ у прамену (P) , те $P \in \Gamma$.

Лема 5.1. Ако је $f = (P) \rightarrow (Q)$, *тада важи* $P, Q \in \Gamma$.

Прочешљајмо дегенерисане случајеве конике. Нека је најпре Γ коника одређена перспективитетом $f = (P) \rightarrow (Q)$ за $P \neq Q$. По Теореме 3.34 је $f(P \vee Q) = Q \vee P$, те све тачке низа $(P \vee Q)$ припадају Γ . Произволна права $p \in (P)$, њена слика $f(p) \in (Q)$ и оса s су конкурентне праве, те преостале тачке конике Γ припадају низу (s) . Конику у овом случају представљају две праве (које се наравно секу), $\Gamma = (s) \cup (P \vee Q)$.

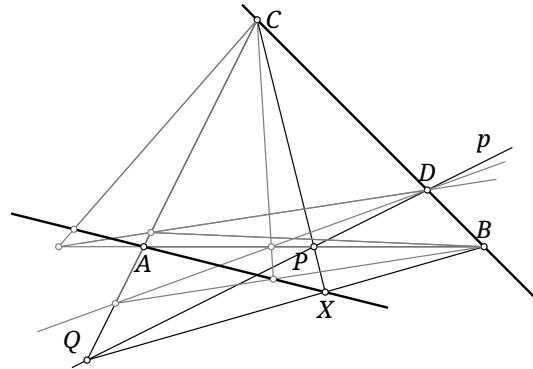
У дегенерисаном случају $P = Q$ потребно је испитати број фиксних правих при пројективитету $f = (P) \rightarrow (P)$. Ако f нема фиксних правих имамо $\Gamma = \{P\}$. Ако f има једну фиксну праву $p = f(p)$ онда је $\Gamma = (p)$. Ако f има две фиксне праве p и q онда имамо да је $\Gamma = (p) \cup (q)$. Ако f има бар три фиксне праве онда по Основној теореме пројективитета (Теорема 3.35) мора бити $f = 1$, све праве су фиксне и зато $\Gamma = \mathcal{T}$. Из претходних дискусија закључујемо да дегенерисане конике могу бити тачка, права, две праве (које се секу) или све тачке пројективне равни.

Лема 5.2. Дегенерисана коника и права могу имати највише две заједничке тачке.

Доказ. Нека је Γ недегенерисана коника одређена са $f = (P)_{\Delta}^{\Gamma}(Q)$ која са правом l има бар три заједничке тачке $X, Y, Z \in \Gamma \cap (l)$. Уколико l не садржи ни P ни Q , тада је $(P \vee X, P \vee Y, P \vee Z) \mapsto (Q \vee X, Q \vee Y, Q \vee Z)$, што важи и за перспективитет $g = (P)_{\Delta}^{\Gamma}(Q)$. По Основној теореми пројективитета (Теорема 3.35) је $f = g$, те је f перспективитет, а Γ је дегенерисана. У супротном, права l садржи P или Q . Ако l садржи само једну од њих, рецимо P , тада преостале две тачке $X, Y \in \Gamma \cap (l)$ нарушавају бијективност јер $Q \vee Y = f(l) = Q \vee X$. Случај $l = P \vee Q$ уз додатно $X \in \Gamma \cap (l)$ даје $f(P \vee X) = Q \vee X$, одакле следи $f(P \vee Q) = P \vee Q$, те је f перспективитет по Теорему 3.34. $\square$

По претходној леми, уколико коника садржи све тачке неке праве онда је она дегенерисана. Међутим, постоје праве које са недегенерисаном коником имају тачно једну заједничку тачку. На пример, ако је $f = (P)_{\Delta}^{\Gamma}(Q)$ и $l = f(P \vee Q)$ тада је $\Gamma \cap (l) = \{Q\}$, јер бисмо за $Q \neq X \in \Gamma \cap (l)$ имали $f(P \vee X) = Q \vee X = l$, одакле је $P \vee Q = P \vee X (= Q \vee X = l)$ и по Теорему 3.34 контрадикторно $f(P \vee Q) = P \vee Q = l$. **Танјенџа** на конику Γ је права која са Γ има тачно једну заједничку тачку.

Пример 5.1. Кроз тачку D стране BC троугла ABC пролази права p која сече стране AB и AC редом у тачкама P и Q . Праве CP и BQ секу се у тачки X . Шта је геометријско место тачака X када $p \ni D$?

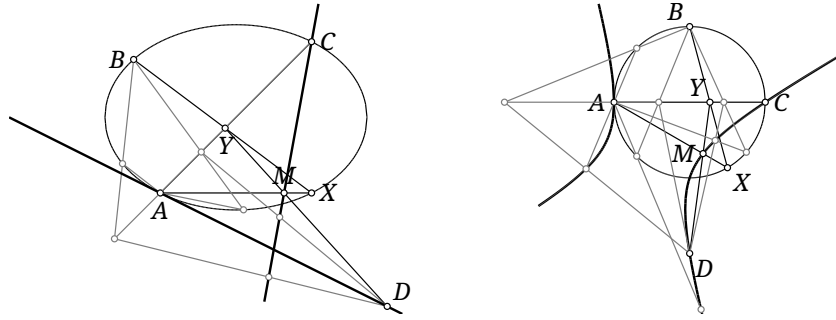


Како је $X = CP \wedge BQ$, тражимо пројективитет f за који је $f(BQ) = CP$, на пример, $f = (B)_{\Delta}^{AC}(D)_{\Delta}^{AB}(C)$ који слика $BQ \mapsto p \mapsto CP$. По Штајнеровој дефиницији, тражено геометријско место тачака је коника. Како важи $BC \mapsto BC \mapsto BC$, f је перспективитет, те је коника дегенерисана и важи $\Gamma = BC \cup s$. Из $AB \mapsto AD \mapsto AC$ следи $AB \wedge AC = A \in \Gamma$, одакле је $\Gamma = BC \cup AX$, где је X нека тачка конике. $\triangle$

Пример 5.2. Дате су праве a и b , као и тачке P, Q и R ван њих. Ако је $r \ni R$ произвољна права и важи $A = r \wedge a$ и $B = r \wedge b$, описати скуп свих сецишта $PA \wedge QB$.

Пројективитет $f = (P)_{\Delta}^a(R)_{\Delta}^b(Q)$ пресликава $PA \mapsto r \mapsto QB$, те је у питању коника. Она је дегенерисана кад је f перспективитет, што се дешава кад су тачке X, Y и R колинеарне где су $X = PQ \wedge a$ и $Y = PQ \wedge b$. Наша коника је дегенерисана ако су тачке P, Q и R колинеарне или ако су праве a, b и PQ конкурентне. $\triangle$

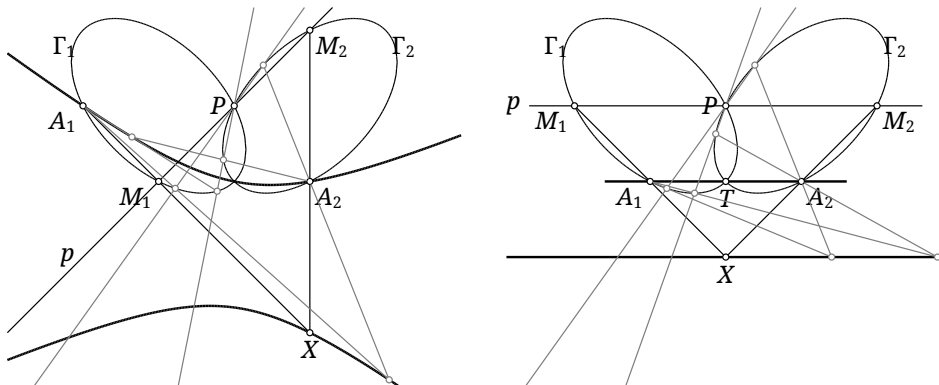
Пример 5.3. Дата је недегенерисана коника Γ и различите тачке $A, B, C \in \Gamma$ и $D \notin \Gamma$. За произвољно $X \in \Gamma$ нека је $Y = BX \wedge AC$, те $M = AX \wedge DY$. Доказати да је геометријско место тачака M када $X \in \Gamma$ једна коника и испитати јој дегенерисаност.



Како је $M = AX \cap DY$, потребно је наћи пројективитет f за који је $f(AX) = DY$. То можемо са $f = (A)_{\Gamma}^{\Gamma}(B)_{\Delta}^{\Delta}(D)$ јер тада важи $AX \mapsto BX \mapsto DY$, те је коника тражено геометријско место тачака. Дегенерисаност даје услов перспективитета $f(AD) = DA$, што се дешава уколико $(A)_{\Gamma}^{\Gamma}(B)$ слика AD у BA , односно уколико је AD тангента на Γ у тачки A . Дакле, Γ је дегенерисана ако и само ако је AD тангента на Γ .

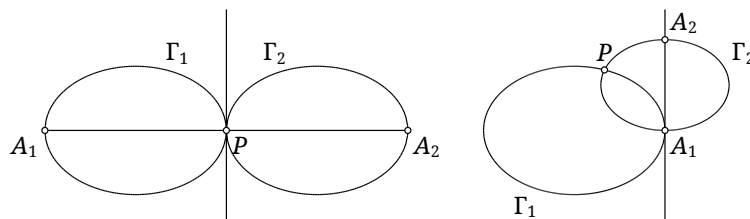
Приметимо да $AC \mapsto BC \mapsto DC$ повлачи $AC \cap DC = C \in \Gamma$, док из Леме 5.1 директно имамо $A, D \in \Gamma$. У случају дегенерисане конике је $\Gamma = AD \cup MC$, где је M нека тачка конике коју смо већ одредили. $\triangle$

Пример 5.4. Дате су недегенерисане конике Γ_1 и Γ_2 , као и различите тачке $A_1 \in \Gamma_1$, $A_2 \in \Gamma_2$ и $P \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. За произвољну праву $p \ni P$ поставимо тачке $M_i \in \Gamma_i \cap p$ са $M_i \neq P$ уколико p није тангента на Γ_i , за $1 \leq i \leq 2$. Доказати да је геометријско место тачака $X = A_1M_1 \cap A_2M_2$ кад p пролази кроз P , коника и испитати јој дегенерисаност.



Пројективитет $f = (A_1)_{\Gamma_1}^{\Gamma_1}(P)_{\Gamma_2}^{\Gamma_2}(A_2)$ даје $A_1M_1 \mapsto p \mapsto A_2M_2$ и доказује да је у питању коника. Како је $A_1 \neq A_2$, коника је дегенерисана за $f(A_1A_2) = A_2A_1$, односно ако и само ако права A_1A_2 има исту слику при пројективитетима $(A_1)_{\Gamma_1}^{\Gamma_1}(P)$ и $(A_2)_{\Gamma_2}^{\Gamma_2}(P)$.

Нека A_1A_2 није тангента ни на Γ_1 , ни на Γ_2 . Тада услов постаје $PT_1 = PT_2$, при чему важи $T_1 \in A_1A_2 \cap \Gamma_1$ и $T_2 \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. Уколико је $T_1 \neq T_2$ имали бисмо $P \in T_1T_2 = A_1A_2$ и контрадикторно $T_1 = P = T_2$, те мора бити $T_1 = T_2 = T$. Тада $T \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и A_1, A_2, T су колинеарне. Коника је дегенерисана ако је $P \neq T$, као и у случају $P = T$ где Γ_1 и Γ_2 имају заједничку тангенту у P .

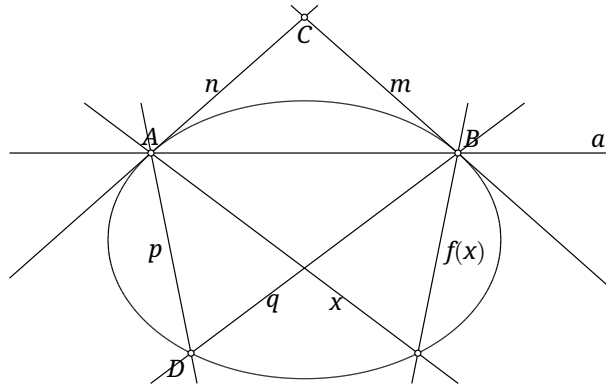


Претпоставимо да је A_1A_2 тангента на тачно једну од коника, рецимо на Γ_1 . Тада услов постаје $PA_1 = PT$, где је $T \in A_1A_2 \cap \Gamma_2$. За $T \neq A_1$ тражимо $P \in A_1T = A_1A_2$ што

је немогуће, те је коника дегенерисана за $T = A_1$, односно за $A_1 \in \Gamma_2$. Симетрично, ако је A_1A_2 тангента на Γ_2 , коника је дегенерисана за $A_2 \in \Gamma_1$. Коначно, ако је A_1A_2 тангента и на Γ_1 и на Γ_2 дегенерисаност би донео услов $PA_1 = PA_2$, одакле је $P \in A_1A_2$, што се никад не дешава. $\triangle$

5.2 Конике реалне пројективне равни

Како описати конике у реалној пројективној равни? Нека је Γ недегенерисана коника одређена пројективитетом $f = (A)_{\wedge}^{\Gamma}(B)$. Како f није перспективитет, праве $a = A \vee B$, $m = f(a)$ и $n = f^{-1}(a)$ су различите. Нека је p произвољна фиксирана права прамена (A) , различита од a и n , а $q = f(p)$ њена слика. Ако обележимо тачке $C = m \wedge n$ и $D = p \wedge q$, то ће $ABCD$ бити четворотеменик.



По Основној теореме колинеације можемо поставити координатни систем тако да темена четворотеменика имају базне координате $A(1 : 0 : 0)$, $B(0 : 1 : 0)$, $C(0 : 0 : 1)$ и $D(1 : 1 : 1)$, а једноставан рачун даје

$$\begin{aligned} a[0 : 0 : 1] &= A \vee B, & m[1 : 0 : 0] &= B \vee C, & n[0 : 1 : 0] &= A \vee C, \\ p[0 : -1 : 1] &= A \vee D, & q[1 : 0 : -1] &= B \vee D. \end{aligned}$$

По Основној теореме пројективитета, f је одређено са $(n, a, p) \mapsto (a, m, q)$. За произвољну праву $x \in (A)$ постоје $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ тако да је $\vec{x} = \mu \vec{a} + \nu \vec{n} = (0, \nu, \mu)$, док за $f(x) \in (B)$ постоје $\mu', \nu' \in \mathbb{R}$ тако да је $\vec{f(x)} = \mu' \vec{m} + \nu' \vec{a}$. Изаберимо векторе представнике у складу са написаним хомогеним координатама. Провером за $(\mu : \nu) \mapsto (\mu' : \nu')$ добијамо $(1 : 0) \mapsto (1 : 0)$ из $f(a) = m$, $(0 : 1) \mapsto (0 : 1)$ из $f(n) = a$ и $(1 : -1) \mapsto (1 : -1)$ из $f(p) = q$, $\vec{p} = \vec{a} - \vec{n}$, $\vec{q} = \vec{m} - \vec{a}$. По Основној теореме пројективитета, три фиксне тачке повлаче идентичко $(\mu' : \nu') = (\mu : \nu)$ и зато $\vec{f(x)} = \mu \vec{m} + \nu \vec{a} = (\mu, 0, \nu)$. Тачка са конике је сециште правих x и $f(x)$, те како је

$$\overrightarrow{x \wedge f(x)} = \vec{x} \times \vec{f(x)} = (0, \nu, \mu) \times (\mu, 0, \nu) = (\nu^2, \mu^2, -\mu\nu),$$

њене хомогене координате су $(\nu^2 : \mu^2 : -\mu\nu)$. Међутим, тачка је облика $(\nu^2 : \mu^2 : -\mu\nu)$ ако и само ако задовољава једначину другог степена $x_3^2 - x_1x_2 = 0$.

Крива другог реда у еуклидској равни је скуп тачака $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ које задовољавају једначину другог степена $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ (где нису сви a_{11}, a_{12}, a_{22} једнаки нули). Ако хомогенизујемо координате са $x = x_1/x_3$ и $y = x_2/x_3$, претходна једначина, после множења са x_3^2 , гласи

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0. \quad (5.1)$$

Свака крива другог реда, односно једначина (5.1), може се записати у матричном облику. Ако обележимо матрице

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

једначина (5.1) постаје $X^T A X = 0$, при чему је матрица A симетрична.

Вратимо се на почетну недегенерисану конику Γ . Након погодног избора координатног система добили смо једначину конике $x_3^2 - x_1 x_2 = 0$ којој (после множења са два) одговара симетрична матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Како гласи једначина конике ако променимо координатни систем или ако пресликамо конику неком колинеацијом? Одговор на ова питања је исти јер у оба случаја (пасивном и активном) веза између старих и нових координата је регуларна матрица (Теорема 4.12). Конкретно, трансформације координата су облика $\lambda X = M X'$, где је $\det M \neq 0$. Заменом у једначину $X^T A X = 0$, добијамо $(M X')^T A (M X') = 0$, односно $X'^T (M^T A M) X' = 0$. Нова једначина $X'^T A' X' = 0$ има матрицу $A' = M^T A M$, при чему она остаје симетрична, $A'^T = (M^T A M)^T = M^T A^T (M^T)^T = M^T A M = A'$. Наша конкретна матрица из (5.2) је регуларна, а како је то и M , имамо регуларно $M^T A M$, што значи да је недегенерисана коника одређена једном симетричном регуларном матрицом.

Размотримо обрат. Да ли свака симетрична матрица A одређује неку конику? По спектралној теорему (Теорема А.4), за сваку симетричну матрицу A реда n читав простор је директна сума сопствених потпростора, Уколико за матрицу преласка M поставимо ортогоналну матрицу чије су колоне сопствени вектори који чине ортонормирану базу, тада коника добија матрицу $A' = M^T A M$ која је дијагонална. Додатно се може извршити трансформација која нормира елементе на дијагонали. Погледајмо како изгледа рачун у конкретном случају $n = 3$.

Нека вектори $V_1(m_{11}, m_{21}, m_{31})$, $V_2(m_{12}, m_{22}, m_{32})$, $V_3(m_{13}, m_{23}, m_{33})$ чине ортонормирану базу из спектралне теореме, тако да је $AV_1 = \lambda_1 V_1$, $AV_2 = \lambda_2 V_2$, $AV_3 = \lambda_3 V_3$. Ако поставимо матрицу преласка

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} V_1 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} V_2 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}} V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_{11}}{\sqrt{|\lambda_1|}} & \frac{m_{12}}{\sqrt{|\lambda_2|}} & \frac{m_{13}}{\sqrt{|\lambda_3|}} \\ \frac{m_{21}}{\sqrt{|\lambda_1|}} & \frac{m_{22}}{\sqrt{|\lambda_2|}} & \frac{m_{23}}{\sqrt{|\lambda_3|}} \\ \frac{m_{31}}{\sqrt{|\lambda_1|}} & \frac{m_{32}}{\sqrt{|\lambda_2|}} & \frac{m_{33}}{\sqrt{|\lambda_3|}} \end{pmatrix},$$

добијамо

$$M^T A M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1|}} V_1 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} V_2 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_3|}} V_3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \lambda_1 V_1 & \lambda_2 V_2 & \lambda_3 V_3 \end{pmatrix},$$

односно

$$A' = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sgn} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sgn} \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Овако долазимо до дијагоналне матрице која на дијагонали има само вредности 1, -1 и 0. Ово нам омогућава да једноставно класификујемо различите типове симетричних матрица, а самим тим и коника. Нека је A реална симетрична матрица реда три.

Ако је A ранга 3 (регуларна), нема сопствених вредности једнаких нули и имамо два суштински различита случаја. У првом је матрица дефинитна (све сопствене вредности су истог знака: три јединице или три минус јединице), што даје једначину $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ са јединственим решењем $(0, 0, 0)$ које не представља тачку пројективне равни, те је у питању празан скуп, што по Штајнеровој дефиницији није коника. У другом случају матрица је недефинитна (две сопствене вредности су једног, а трећа супротног знака), и она се ортогоналним трансформацијама своди на $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, што је случај и са нашим $x_3^2 - x_1x_2 = 0$. Самим тим постоји ортогонална трансформација од почетне матрице до наше што одређује јединствену недегенерисану конику.

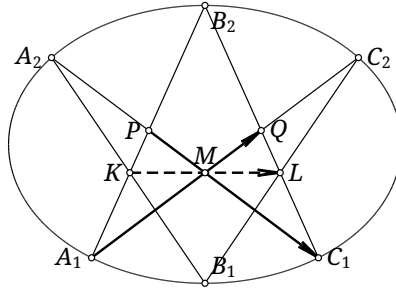
Ако је A ранга 2 имамо једну нулу на дијагонали и два случаја. У првом су обе преостале вредности истог знака, једначина је $x_1^2 + x_2^2 = 0$, што даје тачку $(0 : 0 : 1)$. У другом су те вредности супротног знака, једначина је $x_1^2 - x_2^2 = 0$, што је унија правих $x_1 - x_2 = 0$ и $x_1 + x_2 = 0$, односно две праве $[1 : -1 : 0]$ и $[1 : 1 : 0]$.

Матрица ранга 1 одређује једначину $x_1^2 = 0$ што је права $[1 : 0 : 0]$, док матрица ранга 0 је нула матрица и представља све тачке пројективне равни $\mathcal{T}$. Приметимо да дискутовани случајеви покривају све дегенерисане конике (тачка, права, две праве, све тачке) из наше дискусије након увођења Штајнерове дефиниције.

5.3 Паскалова теорема

У Папосовој теореме полазимо од тројки $A_1, B_1, C_1 \in (p_1)$ и $A_2, B_2, C_2 \in (p_2)$, док теорема тврди да су сецишта $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке. Ако схватимо две праве $(p_1) \cup (p_2)$ као дегенерисану конику, можемо се упитати да ли се нешто мења ако почетних шест тачака поставимо као тачке недегенерисане конике. Покушајмо да имитирамо доказ Папосове теореме из Теореме о перспективитету (доказ Леме 3.31).

Нека су $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ различите тачке недегенерисане конике Γ одређене са $(A_2)_{\Gamma}^I(C_2)$. Природно питање које се поставља је да ли су тачке $K = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $L = (B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $M = (C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне.



Уведимо тачке $P = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee C_1)$ и $Q = (C_1 \vee B_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$, те поставимо пројективитет са $f = (A_1 \vee B_2)_{\Gamma}^S(A_2)_{\Gamma}^I(C_2)_{\Gamma}^I(C_1 \vee B_2)$ који чува суштину јер на исти начин као раније слика одговарајуће елементе,

$$(A_1, K, P, B_2) \mapsto (A_1 \vee A_2, B_1 \vee A_2, C_1 \vee A_2, p_2) \mapsto (A_1 \vee C_2, B_1 \vee C_2, C_1 \vee C_2, p_2) \mapsto (Q, L, C_1, B_2).$$

Како f фиксира заједнички елемент B_2 , у питању је перспективитет и постоји центар S тако да је $f = (A_1 \vee B_2)_{\Gamma}^S(C_1 \vee B_2)$. Одавде су праве $A_1 \vee Q$, $K \vee L$ и $P \vee C_1$ конкурентне у S , те је $S = M$ и тачке K, L, M су колинеарне.

Лема 5.3. Нека су $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ различите тачке недегенерисане конике која је одређена пројективитетом између израмена (A_2) и (C_2) . Тада су сецишта $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке.

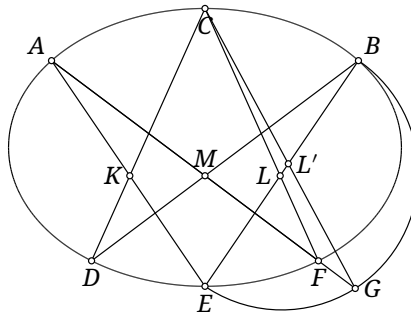
Претходна лема је варијанта чувене Паскалове теореме. Да би она то заиста постала потребно је показати Штајнерову теорему која гарантује да исту конику добијемо независно од избора две различите тачке конике које ће бити носиоци прамена нова између којих је успостављен пројективитет који је одређује. Две тачке које су носиоци прамена и три тачке конике које по Основној теорему пројективитета једнозначно одређују пројективитет затим једнозначно одређују конику.

У наредним теоремама уместо n тачака са недегенерисане конике говорићемо о теменима n -теменика, јер захваљујући Леми 5.2 знамо да међу њима не постоје три колинеарне.

Теорема 5.4 (Штајнерова теорема). *Постоји јединствена недегенерисана коника која садржи шемена неког петотеменика.*

Доказ. Суштина доказа огледа се у томе да се било које две тачке недегенерисане конике могу узети за носиоце прамена из Штајнерове дефиниције. Посматрајмо недегенерисане конике Γ и Γ' које су одређене са $f = (A)_{\wedge}^{\Gamma}(B)$ и $g = (A)_{\wedge}^{\Gamma'}(C)$, при чему је $(A \vee C, A \vee D, A \vee E) \xrightarrow{f} (B \vee C, B \vee D, B \vee E)$ и $(A \vee B, A \vee D, A \vee E) \xrightarrow{g} (C \vee B, C \vee D, C \vee E)$. По Основној теорему пројективитета f и g су једнозначно одређени и важи $A, B, C, D, E \in \Gamma \cap \Gamma'$. За произвољно $F \in \Gamma$ имамо $f(A \vee F) = B \vee F$, те нека је G пресечна тачка праве $A \vee F$ и конике Γ' , односно $(A \vee F) \cap \Gamma' = \{A, G\}$.

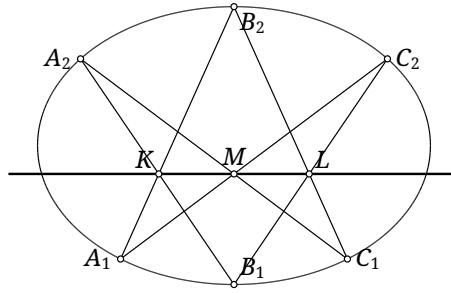
Примена Леме 5.3 на $D, E, F, A, C, B \in \Gamma$ даје колинеарне тачке $K = (D \vee C) \wedge (A \vee E)$, $L = (E \vee B) \wedge (C \vee F)$ и $M = (F \vee A) \wedge (B \vee D)$. Међутим, примена Леме 5.3 на тачке $D, G, E, A, B, C \in \Gamma'$ даје колинеарне тачке $M = (D \vee B) \wedge (A \vee G)$, $L' = (G \vee C) \wedge (B \vee E)$ и $K = (E \vee A) \wedge (C \vee D)$. Даље је $L = (E \vee B) \wedge (K \vee M) = L'$, одакле $C \vee F = C \vee G$, те коначно $F = G$.



Због тога важи $\Gamma = \Gamma'$ што значи да прамен (B) можемо заменити праменом (C) . На сличан начин можемо заменити прамен (A) праменом (D) , што доказује почетну идеју. Ако две конике садрже темена неког петотеменика, $A, B, C, D, E \in \Gamma \cap \Gamma'$, то њима можемо фиксирати носиоце A и B , те су обе конике одређене пројективитетом за који важи $(A \vee C, A \vee D, A \vee E) \mapsto (B \vee C, B \vee D, B \vee E)$, те је $\Gamma = \Gamma'$. $\square$

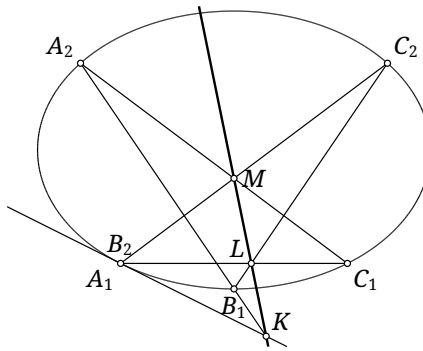
Теорема 5.4 омогућава да из Леме 5.3 уклонимо носиоце прамена пројективитета и тако добијемо чисту теорему коју је први формулисао Паскал давне 1639. године док је још био шеснаестогодишњак [17].

Теорема 5.5 (Паскалова теорема). *Три сецијна насипрамних сипраница ипростој шестотеменика уписаној у недегенерисану конику су колинеарне тачке.*



Конкретно, ако су $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ темена шестотеменика која припадају недегенерисаној коници, тада су сецишта $(A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $(B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $(C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке. Праву која садржи колинеарне тачке у Паскаловој теореми, називамо **Паскалова права**.

Важно је напоменути да Паскалова теорема важи и у граничним случајевима када се две суседне тачке простог шестотеменика поклопе. На пример, ако у простом шестотеменику $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ удупламо темена са $A_1 = B_2$ добијамо гранични петотеменик, у којем спојницу $A_1 \vee B_2$ третирамо као тангенту на конику у тој тачки A_1 . Суштина је да пројективитет који одређује конику има особину да повезује заједнички елемент праменова са одговарајућим тангентама, тако да сви докази које смо имали пролазе и за граничне случајеве.



Слично можемо удуплати још једну тачку и посматрати гранични четворотеменик, или у најдрастичнијем случају гранични тротеменик код кога су сва темена удуплана.

Са друге стране, важи и обрат тврђења, такозвана Обратна Паскалова теорема и она је основа за конструкцију конике која је задата са пет тачака. Ту конструкцију је 1733. године изложио Брејкенриџ¹, али приоритет око тога ко је први открио теорему, оспорио је Маклорен². Та прича пуна контраверзи завршена је тако што теорема данас носи име обојице [54].

Теорема 5.6 (Брејкенриџ–Маклорен). *Уколико су три сецишта наспрамних страница једног шестотеменика колинеарне тачке, тада темена тог шестотеменика припадају некој коници.*

Доказ. Нека је $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ прост шестотеменик такав да су сецишта наспрамних страница $K = (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1)$, $L = (B_1 \vee C_2) \wedge (B_2 \vee C_1)$ и $M = (C_1 \vee A_2) \wedge (C_2 \vee A_1)$ колинеарне тачке. За пројективитет дат као композиција $(A_2) \bar{\wedge} (A_1 \vee B_2) \stackrel{M}{\wedge} (C_1 \vee B_2) \bar{\wedge} (C_2)$ важи

$$\begin{aligned} (A_1 \vee A_2, B_1 \vee A_2, C_1 \vee A_2, B_2 \vee A_2) &\mapsto (A_1, K, P, B_2) \\ &\mapsto (Q, L, C_1, B_2) \mapsto (A_1 \vee C_2, B_1 \vee C_2, C_1 \vee C_2, B_2 \vee C_2). \end{aligned}$$

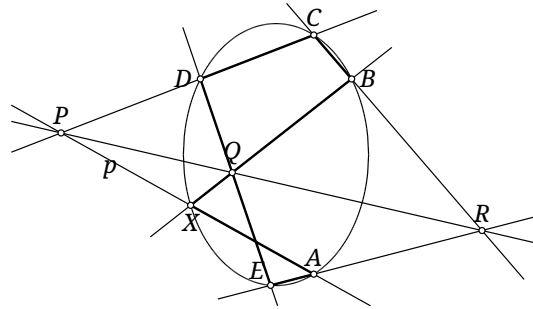
¹William Braikenridge (1700–1762), шкотски математичар

²Colin Maclaurin (1698–1746), шкотски математичар

Коника одређена тим пројективитетом по дефиницији садржи тачке A_1, B_1, C_1, B_2 , као и A_2, C_2 по Лемми 5.1. $\square$

У случају да је пројективитет из претходног доказа перспективитет, коника би била дегенерисана и теорема постаје обрнут Папосове теореме. Уколико говоримо о теменима потпуног, а не простог шестотеменика, та коника је свакако недегенерисана и у питању је обрнут Паскалове теореме. Дакле, уколико су сецишта наспрамних страница шестотеменика колинеарна, тада је тај шестотеменик уписан у неку недегенерисану конику.

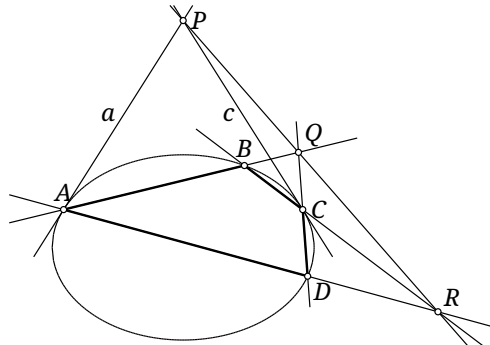
Пример 5.5. Дате су тачке A, B, C, D, E недегенерисане конике Γ и права $p \in (A)$. Конструисати другу пресечну тачку праве p и конике Γ .



Примена Паскалове теореме на прост шестотеменик $AXBCDE$, где је X тражена тачка са $\Gamma \cap (p) = \{A, X\}$ даје колинеарне тачке $P = AX \cap CD = p \cap CD$, $Q = XB \cap DE$ и $R = BC \cap EA$, те су праве XB, DE, PR конкурентне у Q . Конструишемо $Q = PR \cap DE$ и $X = BQ \cap p$.

Алтернативно, можемо конструисати $X = p \cap f(p)$, где је пројективитет $(A) \bar{\wedge} (B)$ одређен са $(AC, AD, AE) \mapsto (BC, BD, BE)$. $\triangle$

Пример 5.6. Дате су тачке A, B, C, D недегенерисане конике Γ и њена тангента $a \in (A)$. Конструисати тангенту на Γ у тачки C .



Примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $AABCCD$ даје колинеарне тачке $P = a \cap c$, $Q = AB \cap CD$ и $R = BC \cap DA$, где је $c \in (C)$ тражена тангента. Конструишемо $P = a \cap RQ$ и $c = PC$. $\triangle$

Пример 5.7. Нека су A, B, C, A', B', C', P тачке недегенерисане конике. Ако су праве AA', BB' и CC' конкурентне, доказати да су тачке $A'P \cap BC$, $B'P \cap AC$ и $C'P \cap AB$ колинеарне.

Обележимо $A_0 = A'P \cap BC$, $B_0 = B'P \cap AC$, $C_0 = C'P \cap AB$, те нека су праве AA', BB' и CC' конкурентне у тачки S . Примена Паскалове теореме на прост шестотеменик $A'PB'BCA$ даје колинеарне A_0, B_0, S , док примена на $B'PC'SAB$ даје колинеарне B_0, C_0, S , одакле су A_0, B_0 и C_0 колинеарне. $\triangle$

Пример 5.8. Нека су A, B, C, D тачке недегенерисане конике Γ . Нека је P сециште тангенти на Γ у тачкама A и C , а Q сециште тангенти на Γ у тачкама B и D . Ако је $R = AB \cap CD$ и $S = AD \cap BC$ доказати да су тачке P, Q, R, S колинеарне.

Примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $AABCCD$ даје колинеарне P, R, S , док примена на $ABBCDD$ даје колинеарне R, Q, S , одакле следи тврђење. $\triangle$

5.4 Корелације

Колинеација пројективне равни је бијективно пресликавање које пресликава тачке у тачке, а праве у праве. Другачији тип пресликавања на дводимензионим објектима зовемо корелација. **Корелација** пројективне равни је бијективно пресликавање које тачке слика у праве, а праве у тачке, при чему чува релацију инциденције.

Прецизније, под корелацијом пројективне равни $(\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$ подразумевамо бијективна пресликавања $f_{\mathcal{T}}: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$ и $f_{\mathcal{P}}: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{T}$ која чувају инциденцију, у смислу да ако важи $A \mathcal{I} p$ за неко $A \in \mathcal{T}$ и $p \in \mathcal{P}$, тада важи и $f_{\mathcal{P}}(p) \mathcal{I} f_{\mathcal{T}}(A)$. Инваријантност релације инциденције за различите тачке $A, B \in \mathcal{T}$ даје $f_{\mathcal{P}}(A \vee B) = f_{\mathcal{T}}(A) \wedge f_{\mathcal{T}}(B)$, односно за различите праве $p, q \in \mathcal{P}$ даје $f_{\mathcal{T}}(p \wedge q) = f_{\mathcal{P}}(p) \vee f_{\mathcal{P}}(q)$. Као код колинеације, пресликавање $f_{\mathcal{T}}$ индукује $f_{\mathcal{P}}$ и обратно, те их обележавамо истим словом f и доживљавамо као трансформацију дисјунктне уније $\mathcal{T} \sqcup \mathcal{P}$.

Пројективна корелација је корелација f чија је рестрикција $f|_p: (p) \rightarrow (f(p))$ на сваку праву p пројективитет. Као у случају колинеације (Лема 4.3), довољно је проверити да је рестрикција на једну праву пројективитет.

Лема 5.7. *Ако је рестрикција корелације f пројективне равни на неку праву p пројективитет, онда је она пројективна корелација.*

Доказ. Нека је f корелација пројективне равни таква да је $f|_p$ пројективитет за неку праву p . Нека је $q \neq p$ произвољна права, а тачка S произвољна која није инцидентна ни са p ни са q . Перспективитет $(q) \overset{S}{\underset{\wedge}{\cap}} (p)$ слика тачку $A \mathcal{I} q$ у тачку $B \mathcal{I} p$ тако да су A, B, S колинеарне, одакле су $f(A), f(B), f(S)$ конкурентне праве, те следи да је $f|_q = (q) \overset{f(S)}{\underset{\wedge}{\cap}} (f(p)) \overset{f(S)}{\underset{\wedge}{\cap}} (f(q))$ пројективитет. $\square$

Теорема 5.8 (Основна теорема корелације). *Постоји јединствена пројективна корелација Папосове равни која њена четворотеменика $ABCD$ слика редом у странице четвоространика $a'b'c'd'$.*

Доказ. Доказ се изводи слично доказу Основне теореме колинеације (Теорема 4.4). Нека је f пројективна корелација Папосове равни, где је $(A, B, C, D) \mapsto (a', b', c', d')$, при чему је $ABCD$ четворотеменик, а $a'b'c'd'$ четвоространик. Тачка $M = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ се корелацијом f мора пресликати у праву $m' = (a' \wedge b') \vee (c' \wedge d')$, док је $f|_{A \vee B}$ по Основној теорему пројективитета једнозначно одређено са $(A, B, M) \mapsto (a', b', m')$. Сасвим слично, тачка $N = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$ се корелацијом f мора пресликати у праву $n' = (a' \wedge d') \vee (b' \wedge c')$, док је $f|_{A \vee D}$ једнозначно одређено са $(A, D, N) \mapsto (a', d', n')$.

За произвољну праву $p \nsubseteq \mathcal{A}$ имамо сецишта $X = (A \vee B) \wedge p$ и $Y = (A \vee D) \wedge p$, те имамо $p = X \vee Y$, што се корелацијом f слика у $P' = f|_{A \vee B}(X) \wedge f|_{A \vee D}(Y)$. Довољно је показати да се конкурентне праве сликају у колинеарне тачке. Посматрајмо фамилију правих p које су конкурентне у некој тачки S и пројективитет

$$h = (a' \wedge b') \overset{f^{-1}}{\underset{\wedge}{\cap}} (A \vee B) \overset{S}{\underset{\wedge}{\cap}} (A \vee D) \overset{f}{\underset{\wedge}{\cap}} (a' \wedge d')$$

за који важи $x' \mapsto X \mapsto Y \mapsto y'$. Дакле, имамо $h(x') = y'$, али и $h(a') = a'$, те је h перспективитет, одакле су тачке $P' = x' \wedge y'$ колинеарне $\square$

Поларијетет је инволутивна корелација. За поларитет важи $f(f(A)) = A$, односно из $f_T(A) = a$ следи $f_P(a) = A$. Уобичајено је да се тачка $A = f(a)$ у том случају зове **пол њправе** a , док се права $a = f(A)$ зове **полара тачке** A . Тако су одговарајуће тачке и праве спрегнуте везом пол-полара.

Ако тачка A лежи на правој b , тада $a = f(A)$ садржи тачку $B = f(b)$ и кажемо да су A и B **конјуговане тачке**, односно да су a и b **конјуговане њправе**. Уколико уз $a = f(A)$ важи и ATa , онда је A **самоконјугована тачка**, док је a **самоконјугована њправа**.

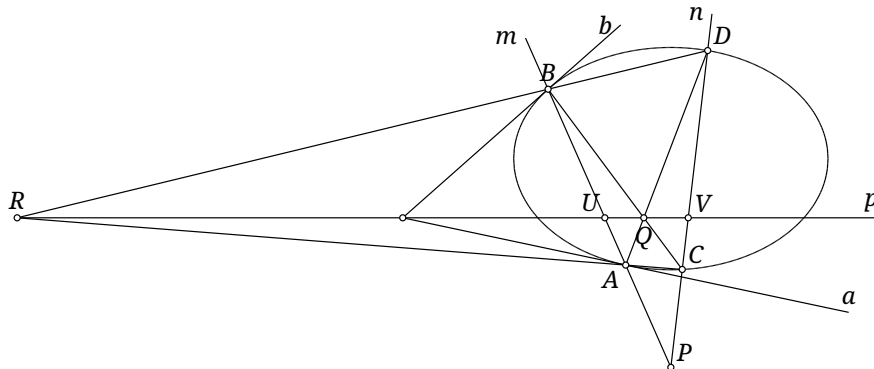
Испоставља се да свака недегенерисана коника одређује један поларитет. Да бисмо припремили доказ тог тврђење потребна нам је наредна лема.

Лема 5.9. *Недегенерисана коника може имати највише две тангенте које су инцидентне са дајом тачком.*

Доказ. Нека је дата тачка $P \notin \Gamma$ и нека коника Γ има две тангенте из P са додирним тачкама M и N . Ако је K произвољна тачка са конике различита од M и N , дефинишимо $S = (M \vee N) \wedge (K \vee P)$, и нека је L таква да важи $\mathcal{H}(PS; KL)$. Пројективитет $(M \vee P, M \vee N, M \vee K) \mapsto (N \vee M, N \vee P, N \vee K)$ одређује Γ и важи $\mathcal{H}(M \vee P, M \vee N; M \vee K, M \vee L)$ и $\mathcal{H}(N \vee M, N \vee P; N \vee K, N \vee L)$, те тај пројективитет слика $M \vee L$ у $N \vee L$, одакле важи $L \in \Gamma$ и $P \vee K$ није тангента. $\square$

Теорема 5.10. *Свака недегенерисана коника одређује њполаријетет.*

Доказ. За неку недегенерисану конику Γ дефинишимо пресликавање $f: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{P}$ на следећи начин. У случају $P \in \Gamma$, нека је $f(P) = p$, где је p тангента на Γ у тачки P . У случају $P \notin \Gamma$ посматрајмо неке праве m и n прамена (P) тако да је $(m) \cap \Gamma = \{A, B\}$ и $(n) \cap \Gamma = \{C, D\}$ (оне свакако постоје по Леми 5.9). Дијагоналне тачке четворотемика $ABCD$ су P , $Q = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$ и $R = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$, те постављамо $f(P) = p = Q \vee R$.



Нека су $U = m \wedge p$ и $V = n \wedge p$ сецишта сечица са $f(P)$. Из четворотемика $CDRQ$ следи $\mathcal{H}(AB; PU)$, док из четворотемика $ABRQ$ следи $\mathcal{H}(CD; PV)$. Сециште сечице и праве p представља тачку која је у пару са P хармонијски конјугована са паром тачака добијених у пресеку те сечице и конике.

За сваку сечицу m , где је $(m) \cap \Gamma = \{A, B\}$, постоји јединствена тачка U таква да је $\mathcal{H}(AB; PU)$. Применом Паскалове теореме у граничном случају на прост четворотемика $AACBBD$ добијамо колинеарне тачке Q , R и $a \wedge b$, где су a и b тангенте на Γ у тачкама A и B . Паскалова права је $p = Q \vee R$ и она је инцидентна са сециштем тангенти a и b . Тако је p одређена тачком U сечице $A \vee B$ из хармонијске четворке и сециштем тангенти у пресечним тачкама те сечице. Како p садржи и хармонијски конјуговане тачке и сецишта тангенти за две сечице, то их онда садржи за све сечице, одакле следи да права p не зависи од избора сечица m и n , те је пресликавање f добро дефинисано.

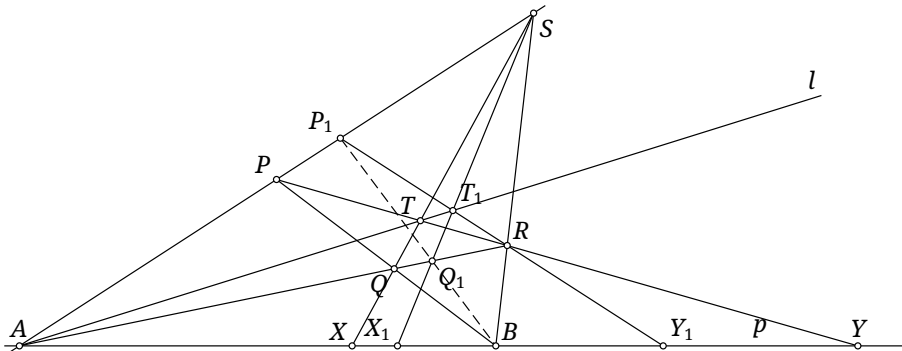
Наредни корак је показати да $P \in f(Q)$ повлачи $Q \in f(P)$. За $P \in \Gamma$ или $Q \in \Gamma$ ствар је очигледна, те нека је $P, Q \notin \Gamma$. Претпоставимо $P \in f(Q)$ и нека је l произвољна сечица кроз Q таква да је $(l) \cap \Gamma = \{A, D\}$. Уведимо тачке B и C тако да је $(A \vee P) \cap \Gamma = \{A, B\}$ и $(B \vee Q) \cap \Gamma = \{B, C\}$. Како $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$ и P припадају правој $f(Q) \neq A \vee B$, то добијамо $(A \vee B) \wedge (C \vee D) = P$ и последично $Q \in f(P)$.

Са друге стране, произвољна права $l = P \vee Q$ је слика тачке $L = f(P) \wedge f(Q)$, те се f може проширити на праве. На основу претходно показаних особина лако је видети да је f бијекција која чува инциденцију, као и инволуција, самим тим и поларитет. $\square$

Уколико постоје две тангенте на Γ које пролазе кроз P , тада полара од P мора пресећи конику баш у додирним тачкама тангенти, што нам даје практичан начин одређивања тангенти из тачке на конику. За даљу анализу потребна нам је егзистенција хиперболичног инволутивног пројективитета са којим смо се аналитички сусрели у Лемама 3.26 и 3.25.

Лема 5.11. *За различите тачке A и B постоји пројективитет њихове спојнице који фиксира A и B , док остале тачке X пресликава у Y тако да важи $\mathcal{H}(AB; XY)$.*

Доказ. Ако је $\mathcal{H}(AB; XY)$ то по дефиницији постоји четворотеменик $PQRS$ тако да важи слика: $A = (P \vee S) \wedge (Q \vee R)$, $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$, $X = (S \vee Q) \wedge (A \vee B)$, $Y = (P \vee R) \wedge (A \vee B)$. Ако означимо праве $p = A \vee B$ и $l = A \vee T$, где је $T = (P \vee R) \wedge (S \vee Q)$, то је $f = (p)_{\wedge}^S(l)_{\wedge}^R(p)$ пројективитет који је по Основној теореми пројективитета једнозначно одређен са $(A, B, X) \mapsto (A, B, Y)$.



Потребно је доказати да $\mathcal{H}(AB; X_1 Y_1)$ повлачи $f(X_1) = Y_1$. За произвољну тачку $X_1 \in (p)$ постављамо $T_1 = (X_1 \vee S) \wedge l$ и $Y_1 = (T_1 \vee R) \wedge p$, што омогућава $f(X_1) = Y_1$, те преостаје доказати да важи $\mathcal{H}(AB; X_1 Y_1)$. За $P_1 = (A \vee S) \wedge (R \vee T_1)$ и $Q_1 = (A \vee R) \wedge (S \vee T_1)$ тротеменици PTQ и $P_1 T_1 Q_1$ су перспективни у односу на центар A , те су по Дезарговој теореми перспективни у односу на неку осу. Та оса садржи тачке $R = (P \vee T) \wedge (P_1 \vee T_1)$, $S = (Q \vee T) \wedge (Q_1 \vee T_1)$ и $(P \vee Q) \wedge (P_1 \vee Q_1)$, одакле следи да су $P \vee Q$, $P_1 \vee Q_1$ и $S \vee R$ конкурентне, односно тачка $B = (P \vee Q) \wedge (S \vee R)$ лежи на $P_1 \vee Q_1$. Коначно, четворотеменик $P_1 Q_1 R S$ доказује $\mathcal{H}(AB; X_1 Y_1)$. $\square$

Лема 5.12. *Поларитет одређен недегенерисаном коником је пројективна корелација.*

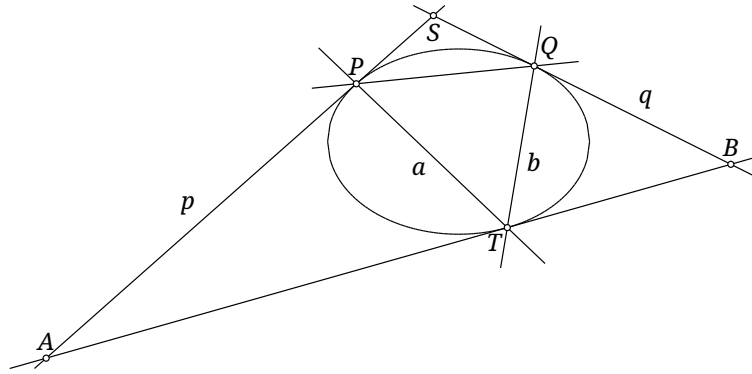
Доказ. Нека је Γ недегенерисана коника и нека $A, B \in \Gamma$. Ако је f поларитет одређен коником Γ , тада је пол праве $p = A \vee B$, тачка $P = f(p)$. Како полара тачке $X \in (p)$ пролази кроз Y где је $\mathcal{H}(AB; XY)$, то је $f(X) = P \vee Y$, одакле следи да је $f|_p = (p)_{\wedge}^P(p)_{\wedge}^P(P)$ пројективитет при чему је $(p)_{\wedge}^P(p)$ пројективитет из Леме 5.11. Како је $f|_p$ пројективитет, то је по Леми 5.7 f пројективна корелација. $\square$

Поларитет f одређен недегенерисаном коником Γ је пројективна корелација, односно његова рестрикција $f|_p$ на произвољну праву p је пројективитет који можемо

једноставно обележити са $f|_p = (p)_{\wedge}^{\Gamma}(f(p))$. Дакле, сваки пар пол-полара (P, p) дефинише пројективитет $(p)_{\wedge}^{\Gamma}(P)$, као и његов инверз, пројективитет $(P)_{\wedge}^{\Gamma}(p)$.

Применом Принципа дуалности на конику добијамо **дуалну конику**, као скуп свих спојница одговарајућих тачака двају низова између којих је успостављен пројективитет. Геометријски смисао дуалне конике огледа се у следећој теореми коју приписујемо Шалу [16].

Теорема 5.13 (Шалова теорема). *Све тангенте недегенерисане конике чине дуалну конику.*



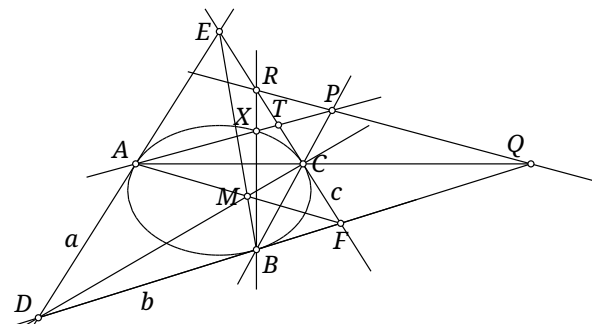
Доказ. Нека су p и q тангенте у тачкама P и Q недегенерисане конике Γ и $S = p \wedge q$. За пројективитет $f = (p)_{\wedge}^{\Gamma}(P)_{\wedge}^{\Gamma}(Q)_{\wedge}^{\Gamma}(q)$ важи $(P, S) \mapsto (p, P \vee Q) \mapsto (P \vee Q, q) \mapsto (S, Q)$. Нека су тачке A и B (различите од P, S, Q) такве да је $f(A) = B$. Ако је a полара од A , а b полара од B , тада је $a \wedge b = T \in \Gamma$. Како је $P \vee T = a$ полара од A то је $A \vee T$ тангента на конику у тачки T , а како је $Q \vee T = b$ полара од B то је и $B \vee T$ тангента на конику у тачки T . Из јединствености тангенте следи да је $A \vee B$ тангента на конику у тачки T . Дакле, свака тангента на недегенерисану конику Γ која је одређена пројективитетом $(P)_{\wedge}^{\Gamma}(Q)$ је зато спојница одговарајућих тачака при пројективитету f , што доказује теорему. $\square$

Применимо Принцип дуалности на Паскалову теорему. Ако су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ праве које припадају недегенерисаној дуалној коници, онда су спојнице $(a_1 \wedge b_2) \vee (a_2 \wedge b_1)$, $(b_1 \wedge c_2) \vee (b_2 \wedge c_1)$ и $(c_1 \wedge a_2) \vee (c_2 \wedge a_1)$ конкурентне. Како тангенте на недегенерисану конику чине дуалну конику (Теорема 5.13), то добијамо теорему коју је 1806. показао Бријаншон [13].

Теорема 5.14 (Бријаншонова теорема). *Три спојнице насупрамних имена једног шестостраника описаног око недегенерисане конике су конкурентне праве.*

Попут Паскалове теореме и Бријаншонова теорема важи у граничним случајевима, односно када тангенте не чине шестостраник, већ петостраник, четвоространик или најдрастичније троостраник. Тачка у којој су одговарајуће спојнице конкурентне зовемо **Бријаншонова тачка**.

Пример 5.9. Дате су тангенте a, b, c и додирне тачке $A \in a, B \in b$ недегенерисане конике Γ . За дату тачку $T \in c$ одредити другу пресечну тачку праве AT и конике Γ .

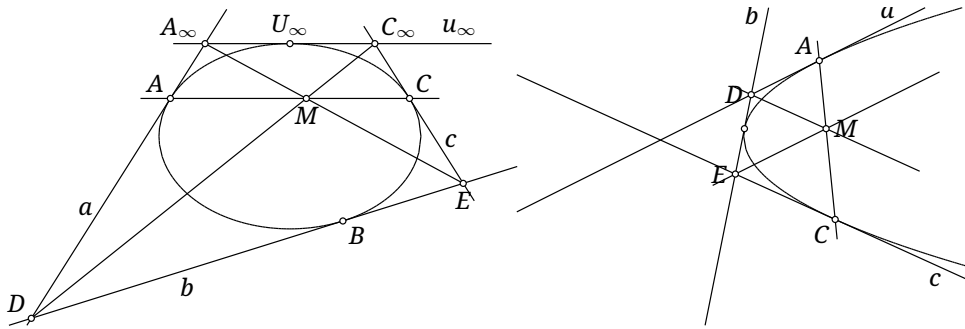


Обележимо $a \wedge b = D$, $a \wedge c = E$, $b \wedge c = F$. Додирну тачку C тангенте c добијамо применом Бријаншонове теореме на прост гранични тространик $aabbcc$. Праве AF , DC , BE су конкурентне, те имамо $M = AF \wedge BE$ и $C = MD \wedge c$. Примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $AXBBCS$, где је X тражена тачка даје колинеарне тачке $P = AX \wedge BC = AT \wedge BC$, $Q = b \wedge CA$, $R = XB \wedge c$, одакле је $R = PQ \wedge c$ и $X = AT \wedge BR$. $\triangle$

Пример 5.10. Дате су тачке A, B, C, D недегенерисане конике Γ и тачка $T \notin \Gamma$. Ако је AT тангента на Γ , конструисати другу тангенту из T .

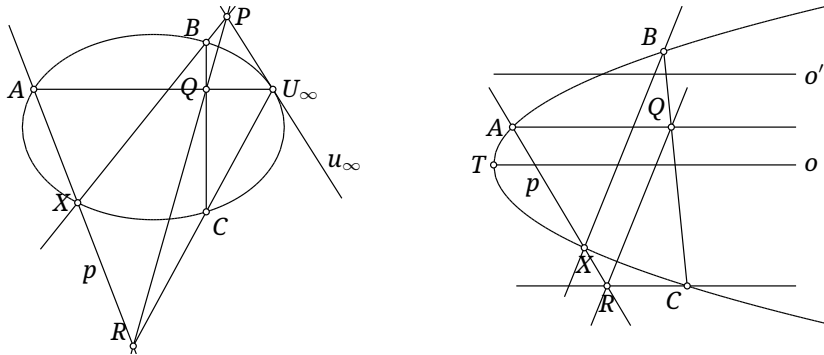
Примена Паскалове теореме на гранични четворотеменик $AABBCD$ даје тангенту b у B , а примена на $AABCCD$ даје тангенту c у C . Примена Бријаншонове теореме на гранични четвоространик $aatbbcs$ даје $t \ni T$ тражену тангенту уз коришћење услова $a \wedge t = T$, где је $a = AT$ тангента. $\triangle$

Пример 5.11. Конструисати додирну тачку C тангенте c на параболу, ако су дате тангенте a, b, c и тачка $A \in a$ параболо.



Парабола додирује бесконачну праву u_∞ у тачки U_∞ . Уведимо тачке $D = a \wedge b$, $E = c \wedge b$, $A_\infty = a \wedge u_\infty$, $C_\infty = c \wedge u_\infty$. Примена Бријаншонове теореме на гранични четвоространик $aabccu_\infty$ даје конкурентне праве AC , DC_∞ и EA_∞ , те за $M = DC_\infty \wedge EA_\infty$ имамо $C = AM \wedge c$. Конструкцију почињемо са $D = a \wedge b$ и $E = c \wedge b$, затим је M сециште праве кроз D паралелне c и праве кроз E паралелне a , те коначно $C = AM \wedge c$. $\triangle$

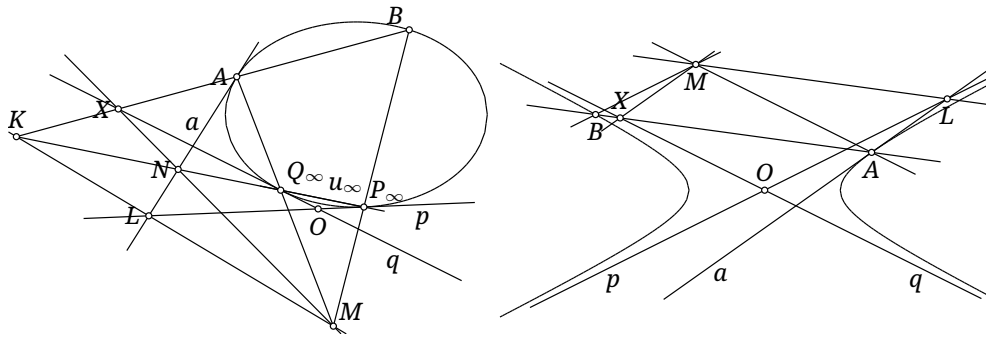
Пример 5.12. Дате су тачке A, B, C параболо и правац o' њене осе, као и права $p \ni A$. Конструисати другу пресечну тачку праве p и параболо.



За параболу Γ са осом o и теменом T важи $\Gamma \cap o = \{U_\infty, T\}$, где је $\Gamma \cap u_\infty = \{U_\infty\}$, док из $o' \parallel o$ имамо $U_\infty = o \wedge o'$. Примена Паскалове теореме на прост гранични петотеменик $U_\infty U_\infty AXBC$ за тражено $X \in \Gamma \cap p$ даје колинеарне тачке $P = u_\infty \wedge XB$, $Q = U_\infty A \wedge BC$ и $R = AX \wedge CU_\infty = p \wedge CU_\infty$, одакле $P \in QR$, што даје $P = QR \wedge u_\infty$, те коначно $X = PB \wedge p$.

Конструкција је следећа: тачка Q је пресек праве BC и праве кроз A паралелне o' , тачка R је пресек праве p и праве кроз C паралелне o' , тачка X је пресек праве p и праве кроз B паралелне QR . $\triangle$

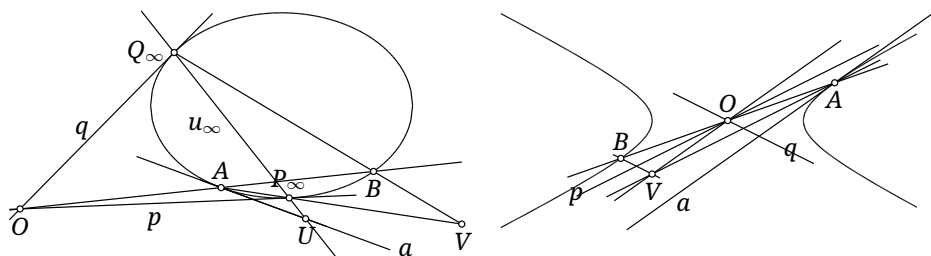
Пример 5.13. Дате су тачке A и B и праве a и p . Конструисати центар хиперболе Γ ако $A, B \in \Gamma$ при чему је p асимптота, док је a тангента у A .



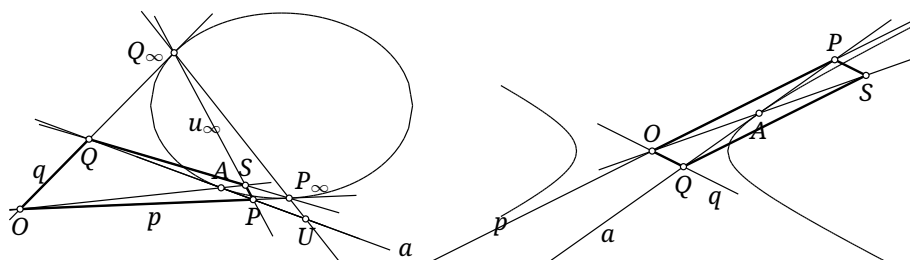
Асимптоте p и q хиперболе Γ су тангенте које додирују Γ у бесконачним тачкама P_∞ и Q_∞ , док се центар хиперболе налази у њиховом пресеку $O = p \wedge q$. Преостаје пронаћи другу асимптоту q . Применимо Паскалову теорему на прост гранични четворотеменик $Q_\infty P_\infty P_\infty BAA$. Паскалову праву чине $K = Q_\infty P_\infty \wedge BA = u_\infty \wedge BA$, $L = p \wedge a$, $M = P_\infty B \wedge AQ_\infty$, одакле је $M = KL \wedge P_\infty B$, те $Q_\infty = AM \wedge u_\infty$ што значи да је $q \parallel AM$. Нова примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $Q_\infty Q_\infty P_\infty BAA$ даје Паскалову праву коју чине $X = q \wedge BA$, $N = u_\infty \wedge a$, $M = P_\infty B \wedge AQ_\infty$. Даље је $X = NM \wedge BA$, затим $q = XQ_\infty$ и коначно $O = p \wedge q$.

На основу претходне анализе конструкција је следећа. Тачка L је пресек правих a и p . Тачка M је пресек праве кроз L паралелне BA и праве кроз B паралелне p . Тачка X је пресек праве BA и праве кроз M паралелне a . Права q пролази кроз X и паралелна је са AM . Тражени центар O је пресек правих p и q . $\triangle$

Пример 5.14. Дате су тачке A и O , као и праве a и p . Ако је A додирна тачка тангенте a на хиперболу, O центар те хиперболе, а p једна њена асимптота, одредити другу њену асимптоту.



Тачка B симетрична тачки A у односу на O ($A \neq B \in AO \cap k(O, OA)$) припада коници. Нека је $P_\infty = p \wedge u_\infty$ и $Q_\infty = q \wedge u_\infty$, где је q друга асимптота. Примена Паскалове теореме на прост гранични четворотеменик $P_\infty P_\infty AABQ_\infty$ даје колинеарне тачке $O = p \wedge AB$, $V = P_\infty A \wedge BQ_\infty$ и $U = a \wedge u_\infty$ одакле је $V = OU \wedge P_\infty A$, те $Q_\infty = BV \wedge u_\infty$ и коначно $q = OQ_\infty$. Конструкција је следећа: тачка B је симетрична A у односу на O , тачка V је пресек праве кроз O паралелне a и праве кроз A паралелне p , права q пролази кроз O и паралелна је са BV .

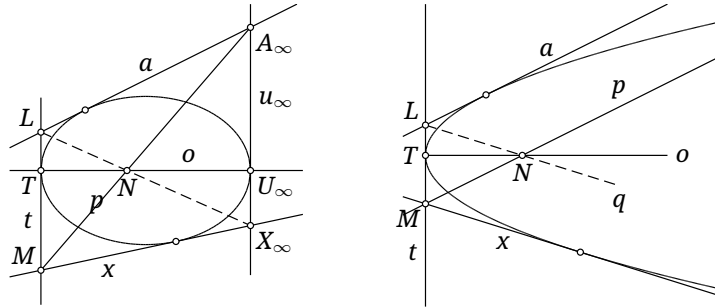


Алтернативно, задатак је могуће елегантно решити употребом Бријаншонове теореме. Нека је $P = a \wedge p$, $Q = a \wedge q$ и $S = P_{\infty} Q \wedge Q_{\infty} P$. Како је $PS \wedge OQ = Q_{\infty}$ и $QS \wedge OP = P_{\infty}$, то је $PS \parallel OQ$ и $QS \parallel OP$, те је четвороугао $PSQO$ паралелограм. Примена Бријаншонове теореме на прост гранични тространик $prqqa$ даје конкурентне праве $P_{\infty}Q$, OA и $Q_{\infty}P$. Одавде $S \in OA$, те $A = PQ \wedge OS$, а како се дијагонале паралелограма полове то је $PA \cong QA$. Конструисамо Q као симетричну са P у односу на A (односно $P \neq Q \in a \cap k(A, AP)$), те је $q = OQ$. $\triangle$

Пример 5.15. Дате су асимптоте p и q хиперболе Γ , као и тачке $A \in \Gamma$ и $T \in p$. Конструисати тангенту из T на Γ .

Нека су $P_{\infty} = p \wedge u_{\infty}$ и $Q_{\infty} = q \wedge u_{\infty}$ додирне тачке асимптота. Примена Паскалове теореме на гранични тротеменик $AAP_{\infty}P_{\infty}Q_{\infty}Q_{\infty}$ даје тангенту a у тачки A . Примена Бријаншонове теореме на гранични четвоространик $tpraqq$ где користимо $t \wedge p = T$ даје тражену тангенту $t \ni T$. $\triangle$

Пример 5.16. Дате су праве a и t , као и тачке T и M са праве t . Ако је T теме параболе и ако су a и t њене тангенте, конструисати другу тангенту из тачке M на ту параболу.

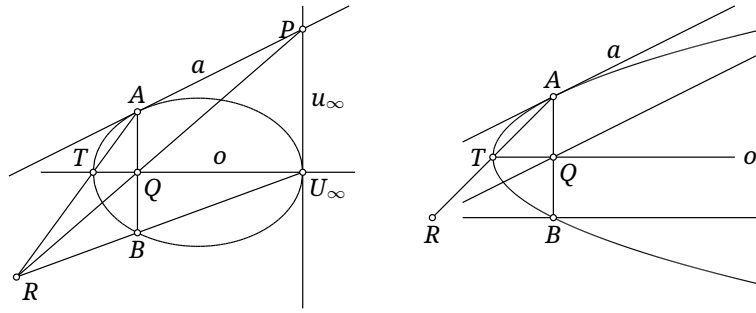


Нека је x тражена тангента из M . Уведимо тачке $L = a \wedge t$, $A_{\infty} = a \wedge u_{\infty}$, $X_{\infty} = x \wedge u_{\infty}$, $\{U_{\infty}\} = \Gamma \cap u_{\infty}$. Тачка U_{∞} је бесконачна тачка осе параболе o која је нормална на тангенту t у темену T . Примена Бријаншонове теореме на прост гранични четвоространик $ttxu_{\infty}u_{\infty}a$ даје праве $o = TU_{\infty}$, $p = (t \wedge x) \vee (u_{\infty} \wedge a) = MA_{\infty}$, $q = (x \wedge u_{\infty}) \vee (a \wedge t) = X_{\infty}L$ које су конкурентне у Бријаншоновој тачки. За $N = o \wedge p$ имамо $N \in q$, те је $X_{\infty} \in NL$. Све је спремно за конструкцију. Права o пролази кроз T и нормална је на t , док права p пролази кроз M и паралелна је са a . Даље је $N = o \wedge p$, $L = a \wedge t$, и коначно x је права кроз M паралелна са NL . $\triangle$

Пример 5.17. Дате су праве p и q , као и тачке $P \in p$ и $Q \in q$. Ако права p додирује параболу Γ у P , а права q додирује Γ у Q , конструисати тангенту на Γ која је паралелна правој PQ .

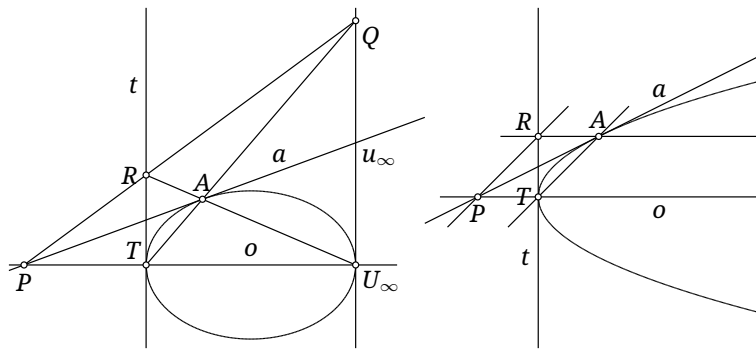
Примена Бријаншонове теореме на гранични четвоространик $xu_{\infty}prqq$, где је x тражена тангента, даје конкурентне праве $(PQ \wedge u_{\infty}) \vee (p \wedge q)$, $(p \wedge u_{\infty}) \vee q$ и $(q \wedge x) \vee p$. Бријаншонову тачку B конструисамо као сециште праве кроз $p \wedge q$ која је паралелна са PQ и праве кроз Q која је паралелна са p . Сада су праве BP , q и x конкурентне, те је x права кроз $BP \wedge q$ која је паралелна са PQ . $\triangle$

Пример 5.18. Дате су различите праве a и o , као и тачка $A \in a$. Конструисати теме параболе Γ са осом o којој је a тангента у тачки $A \in \Gamma$.



Нека је U_∞ додирна тачка параболе и u_∞ , а тачка T тражено теме параболе Γ . Тачка B која је симетрична тачки $A \in \Gamma$ у односу на осу o такође припада Γ . Ако применимо Паскалову теорему на гранични четворотеменик $AABU_\infty U_\infty T$ добијамо Паскалову праву коју чине $P = a \wedge u_\infty$, $Q = AB \wedge U_\infty T = AB \wedge o$, $R = BU_\infty \wedge TA$. Сада је $R = BU_\infty \wedge PQ$ и коначно $T = o \wedge AR$. На основу анализе, конструкцију изводимо на следећи начин. Конструисамо тачку Q као подножје нормале из A на праву o , а затим $A \neq B \in AQ \cap k(Q, QA)$. Даље је R сециште праве кроз B паралелне o и праве кроз Q паралелне a . Коначно T је сециште правих o и AR . $\triangle$

Пример 5.19. Дата је права o и тачке $T \in o$ и $A \notin o$. Ако је A тачка параболе Γ са осом o и теменом T , конструисати тангенту на ту параболу у тачки A .

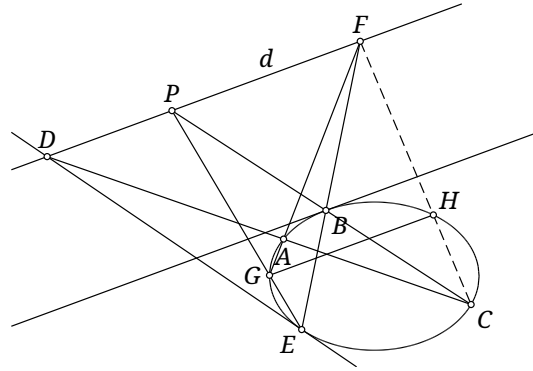


Нека је U_∞ додирна тачка параболе и u_∞ , а t тангента у темену T параболе Γ . Ове елементе имамо на располагању будући да је $T \in t \perp o$ и $U_\infty = o \wedge u_\infty$. Применом Паскалове теореме на гранични тротеменик $AATTU_\infty U_\infty$ добијамо колинеарне тачке $a \wedge TU_\infty = a \wedge o = P$, $AT \wedge u_\infty = Q$, $t \wedge U_\infty A = R$. Даље је $P = QR \wedge o$ и коначно $a = AP$. Дакле, конструкција се изводи на следећи начин. Најпре је R сециште праве кроз A паралелне o и праве t , а затим је P сециште праве кроз R паралелне AT и праве o , те је завршно $a = AP$ тражена тангента. $\triangle$

Пример 5.20. Дате су тачке A, B, T и права p . Ако хипербола Γ има асимптоту p , тангенту AT и $A, B \in \Gamma$, конструисати другу тангенту из T на Γ .

Правна $a = TA$ је једна тангента на Γ , а нека је $x \ni T$ друга тражена тангента. Да би одредили x природно је применити Бријаншонову теорему где a и x постављамо за суседне странице. Међутим, како немамо довољно тангенти за примену, прво ћемо одредити тангенту $b \ni B$. Ако је $P_\infty = p \wedge u_\infty$ додирна тачка асимптоте, примена Паскалове теореме на гранични тротеменик $AABBP_\infty P_\infty$ даје b . Затим примењујемо Бријаншонову теорему, на пример, на гранични четворотеменик $aaxprb$. $\triangle$

Пример 5.21. Нека су A, B, C тачке недегенерисане конике Γ , а d права која је паралелна са тангентом на Γ у B . Нека је $D = AC \wedge d$, E додирна тачка Γ и неке њене тангенте кроз D , $F = BE \wedge d$ и $G \neq A$ пресечна тачка праве AF и конике Γ . Ако је H тачка конике Γ таква да су GH и d паралелне, доказати да су тачке C, F, H колинеарне.



Примена Паскалове теореме на гранични петотеменик $EEBCAG$ даје колинеарне тачке D, F, P , где је $P = BC \cap EG$, што значи да $P \in d$. Након тога, примена Паскалове теореме на гранични петотеменик $HCBVEG$ даје колинеарне тачке P, B_∞ и $HC \cap BE$, где је B_∞ бесконачна тачка тангенте у тачки B . Међутим, из паралелности следи $B_\infty \in d$, што значи да је Паскалова права у претходној примени теореме управо права d , те су праве HC, BE и d конкурентне у F , односно тачке H, C, F су колинеарне. $\triangle$

5.5 Пол и полара реалне пројективне равни

Размотримо конике у реалној пројективној равни, где се природно поставља питање како што лакше доћи до једначине тангенте на конику, односно како реализовати везу пол-полара.

Нека је P тачка, а l произвољна права кроз P која сече недегенерисану конику Γ у две тачке, $\Gamma \cap (l) = \{A, B\}$. Знамо да полара p за пол P пролази кроз тачку X за коју важи $\mathcal{H}(AB; PX)$. Ако поставимо координатни систем на правој l , фиксирањем вектора представника $\vec{A}$ и $\vec{B}$ са нормираним $\vec{P} = \vec{A} + \vec{B}$, из $\mathcal{H}(AB; PX)$ је $(ABPX) = -1$, односно $\vec{X} = \vec{A} - \vec{B}$. Нека је G матрица конике Γ , односно регуларна симетрична матрица таква да $Y \in \Gamma$ ако и само ако је $\vec{Y}^T G \vec{Y} = 0$. Како је $\vec{A}^T G \vec{A} = 0$ и $\vec{B}^T G \vec{B} = 0$, то је $\vec{P}^T G \vec{X} = (\vec{A} + \vec{B})^T G (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{B}^T G \vec{A} - \vec{A}^T G \vec{B}$. Међутим, транспоновањем добијамо $\vec{B}^T G \vec{A} = (\vec{B}^T G \vec{A})^T = \vec{A}^T G \vec{B}$, одакле следи $\vec{P}^T G \vec{X} = 0$.

Полара тачке P је права која садржи тачке X и зато је $\vec{p}^T = \vec{P}^T G$, односно $\vec{p} = G \vec{P}$. Дакле, множењем пола слева матрицом конике добијамо полару.

Теорема 5.15. Полара тачке P у односу на недегенерисану конику одређену регуларном симетричном матрицом G у $\mathbb{RP}^2$ је права p одређена са $\vec{p} \propto G \vec{P}$.

Пример 5.22. Дата је коника $\Gamma : 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_2x_3 = 0$. Одредити једначину поларе тачке $A(1 : 0 : 1)$. Наћи, ако постоје, тангенте из A на криву Γ . Наћи пол праве $x_3 = 0$.

Једначина конике је $X^T G X = 0$, где је њена матрица

$$G \propto \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Полара тачке A се једноставно рачуна

$$\overrightarrow{\text{pol} A} \propto G \vec{A} \propto \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

те је $\text{pol } A = [2 : -1 : -2]$. Међутим, како је $\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{pol } A} = 0$ то $A \in \text{pol } A$ и постоји само једна тангента кроз A на конику и то је баш полара $[2 : -1 : -2]$.

Пол праве $q[0 : 0 : 1]$ тражимо из $\vec{q} \propto G \overrightarrow{\text{pol } q}$, те је $\overrightarrow{\text{pol } q} \propto G^{-1} \vec{q}$. Један начин је искористити инверзну матрицу

$$G^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -6 & -4 & -4 \\ -6 & -4 & -7 \end{pmatrix},$$

од које нам је потребна само њена трећа колона, после чега је $\text{pol } q = (6 : 4 : 7)$.

Ако је проблем наћи инверзну матрицу, можемо расписати $\vec{q} \propto G \overrightarrow{\text{pol } q}$ са

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

одакле је $2x_1 - 3x_2 = 0$ и $-3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Даље је $x_1 = 3x_2/2$, те $7x_2/2 = 2x_3$, односно $x_3 = 7x_2/4$, што даје $\text{pol } q = (3/2 : 1 : 7/4) = (6 : 4 : 7)$. $\triangle$

Пример 5.23. Дата је коника $\Gamma : 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$. Одредити тангенте из тачке $A(1 : 1 : 1)$ на конику Γ . Да ли је права $x_3 = 0$ тангента на Γ ?

Једначина конике је $X^T G X = 0$, где је њена матрица

$$G \propto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тражимо полару тачке A са

$$\overrightarrow{\text{pol } A} \propto G \vec{A} \propto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

те је $\text{pol } A = [1 : -1 : -1]$. Додирне тачке тангенти добијамо у пресеку конике и поларе. Решавањем система једначина $3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ (коника) и $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ (полара) добијамо два решења, тачке $M(1 : 0 : 1)$ и $N(1 : 1 : 0)$. Тражене тангенте су праве $AM[1 : 0 : -1]$ и $AN[1 : -1 : 0]$, односно $x_1 = x_3$ и $x_1 = x_2$.

Да ли је нека права тангента на конику можемо одгонетнути на више начина. На пример, можемо пронаћи пол $P(x_1 : x_2 : x_3)$ те праве $p = [0 : 0 : 1]$ са

$$\overrightarrow{\text{pol } P} \propto G \vec{P} \propto \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{p},$$

одакле добијамо систем $3x_1 - x_2 - x_3 = 0$, $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$ чије је решење $P(1 : 1 : 2)$. Међутим, провером у једначину конике видимо да $P \notin \Gamma$, те $x_3 = 0$ није тангента.

Алтернативно, пресек Γ и праве $x_3 = 0$ даје $3x_1^2 - x_2^2 - 2x_1x_2 = (3x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0$, што значи да наша права сече конику у две тачке и не може бити тангента. $\triangle$

Пример 5.24. Наћи једначину конике која додирује осу Ox у тачки $(3, 0)$, осу Oy у тачки $(0, 2)$ и додирује бесконачну праву.

Једначина конике је $X^T G X = 0$, где је њена матрица

$$G \propto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Имамо две везе пол-полара: $(3 : 0 : 1) \leftrightarrow [0 : 1 : 0]$ и $(0 : 2 : 1) \leftrightarrow [1 : 0 : 0]$ на које примењујемо $\overrightarrow{\text{pol}A} \propto \overrightarrow{GA}$. Из прве везе добијамо $3a_{11} + a_{13} = 0$ и $3a_{13} + a_{33} = 0$, док из друге $2a_{22} + a_{23} = 0$ и $2a_{23} + a_{33} = 0$. Одатле је $a_{13} = -3a_{11}$, $a_{33} = -3a_{13} = 9a_{11}$, $a_{23} = -a_{33}/2 = -9a_{11}/2$, $a_{22} = -a_{23}/2 = 9a_{11}/4$, што нас за $a = a_{11}/4$, $b = a_{12}$ доводи до

$$G \propto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -3a_{11} \\ a_{12} & \frac{9}{4}a_{11} & -\frac{9}{2}a_{11} \\ -3a_{11} & -\frac{9}{2}a_{11} & 9a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & b & -12a \\ b & 9a & -18a \\ -12a & -18a & 36a \end{pmatrix}.$$

Коника $4ax_1^2 + 2bx_1x_2 - 24ax_1x_3 + 9ax_2^2 - 36ax_2x_3 + 36ax_3^2 = 0$ додирује $x_3 = 0$, што значи да постоји дупло решење квадратне једначине $4ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 9ax_2^2 = 0$. Дискриминанта ове једначине $(2b)^2 - 4 \cdot 4a \cdot 9a = 4(b^2 - 36a^2)$ мора бити нула, што нас доводи до потенцијалних решења $b = \pm 6a$. Како је $\det G = 36a(-36a^2 + 12ab - b^2)$, а коника није дегенерисана, то отпада $b = 6a$, те преостаје $b = -6a$. Коначно, тражена коника има једначину $4x_1^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 9x_2^2 - 36x_2x_3 + 36x_3^2 = 0$. $\triangle$

Пример 5.25. Одредити фамилију свих недегенерисаних коника које садрже тачке $(2 : 0 : 1)$ и $(0 : 1 : 1)$, а за тангенте имају праве $x_1 = 0$ и $x_1 = 2x_3$. Одредити параболу из ове фамилије.

Како је $(2 : 0 : 1) \in [1 : 0 : 2]$ и $(0 : 1 : 1) \in [1 : 0 : 0]$, то имамо две везе пол-полара. Ако је $G = (a_{ij})_{ij}$ матрица конике имамо

$$G \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} + a_{13} \\ 2a_{12} + a_{23} \\ 2a_{13} + a_{33} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} + a_{13} \\ a_{22} + a_{23} \\ a_{23} + a_{33} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

одакле добијамо четири једначине: $2(2a_{11} + a_{13}) + (2a_{13} + a_{33}) = 0$, $2a_{12} + a_{23} = 0$, $a_{22} + a_{23} = 0$, $a_{23} + a_{33} = 0$. Можемо изразити $a_{23} = -2a_{12}$, $a_{22} = 2a_{12}$, $a_{33} = 2a_{12}$, $2a_{11} + 2a_{13} = -a_{12}$. За $a_{12} = 0$ је очигледно $\det G = 0$, те можемо матрицу скалирати са $a_{12} = 2$, одакле је даље $a_{23} = -4$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 4$, $a_{11} + a_{13} = -1$. Матрица конике за $a = a_{11}$ је

$$G \propto \begin{pmatrix} a & 2 & -a-1 \\ 2 & 4 & -4 \\ -a-1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Рачунамо $\det G = -4(1-a)^2$, те случај $a = 1$ даје дегенерисану конику. Тражене конике имају једначину $ax_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2(a+1)x_1x_3 - 8x_2x_3 = 0$ за $a \neq 1$. Парабола има тангенту $x_3 = 0$ што у пресеку са коником даје $ax_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 = 0$, док је дискриминанта ове квадратне једначине нула само за $a = 1$, што није дозвољено, односно тражена парабола не постоји. $\triangle$

Пример 5.26. Дате су тачке афине равни $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ и $D(0, 1)$. У хомогеним координатама одредити формуле колинеације f при којој су тачке A и C фиксне, док се тачке B и D пресликавају редом у бесконачне тачке правих AB и AD . Одредити слике унутрашњости квадрата $ABCD$, као и круга $k(C, CB)$ при колинеацији f . Која је афина једначина криве $f(k)$?

Преласком на хомогене координате имамо $A(0 : 0 : 1)$, $B(1 : 0 : 1)$, $C(1 : 1 : 1)$, $D(0 : 1 : 1)$. Права AB има једначину $x_2 = 0$, те је њена бесконачна тачка $E(1 : 0 : 0)$. Права AD има једначину $x_1 = 0$, те је њена бесконачна тачка $F(0 : 1 : 0)$. Колинеацију

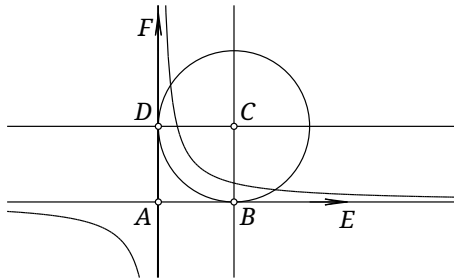
$$\lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

једнозначно одређујемо из услова $(A, B, C, D) \mapsto (A, E, C, F)$.

$$\begin{array}{l|l|l|l} 0 = a_{13} & 0 \neq a_{11} + a_{13} & \lambda = a_{11} + a_{12} + a_{13} & 0 = a_{12} + a_{13} \\ 0 = a_{23} & 0 = a_{21} + a_{23} & \lambda = a_{21} + a_{22} + a_{23} & 0 \neq a_{22} + a_{23} \\ 0 \neq a_{33} & 0 = a_{31} + a_{33} & \lambda = a_{31} + a_{32} + a_{33} & 0 = a_{32} + a_{33} \end{array}$$

Одмах је $a_{13} = a_{23} = a_{21} = a_{12} = 0$, а добијамо и $\lambda = a_{11} = a_{22} = a_{31} = a_{32} = -a_{33}$. Тражена колинеација је

$$\begin{aligned} \lambda x'_1 &= x_1 \\ \lambda x'_2 &= x_2 \\ \lambda x'_3 &= x_1 + x_2 - x_3 \end{aligned}$$



Једначина круга $k(C, CB)$ је $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$, што хомогенизацијом доноси једначину $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$. Инверзна колинеација је $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_1 + x'_2 - x'_3$, те заменом у једначину после сређивања добијамо $x_3'^2 - 2x_1'x_2' = 0$, што је хипербола $x'u' = 1/2$. $\triangle$

Пример 5.27. Дата је коника $\Gamma: x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$ и тачка $A(1 : 2 : 1)$. Одредити тангенте из тачке A на конику Γ . Ако су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти из A на Γ , одредити још неку конику која садржи тачке T_1 и T_2 и има за тангенте праве AT_1 и AT_2 .

Погледајмо матрицу конике и рачун за полару

$$G \propto \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\text{pol}A} \propto G\vec{A} \propto \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Полара тачке A је права $\text{pol}A = [-4 : 2 : 4] = [-2 : 1 : 2]$ и ту леже додирне тачке тангенти, $\text{pol}A \cap \Gamma = \{T_1, T_2\}$. Налазимо их из система $x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0$, $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Након што заменимо $2x_1 = x_2 + 2x_3$ у прву једначину добијамо $x_2^2 + 4x_3^2 - (x_2 + 2x_3)x_2 - 2(x_2 + 2x_3)x_3 + 2x_2x_3 = 0$, односно $-2x_2x_3 = 0$. Постоје два решења, у првом је $x_2 = 0$, што даје $T_1(1 : 0 : 1)$, односно тангенту $AT_1 = [1 : 0 : -1]$, док је у другом $x_3 = 0$, што даје $T_2(1 : 2 : 0)$, односно тангенту $AT_2 = [2 : -1 : 0]$.

У другом делу задатка постављамо две везе пол-полара. Из прве имамо

$$G'\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{13} \\ a_{12} + a_{23} \\ a_{13} + a_{33} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AT_1},$$

што даје $a_{12} + a_{23} = 0$ и $a_{11} + 2a_{13} + a_{33} = 0$. Из друге имамо

$$G'\vec{T}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} \\ a_{12} + 2a_{22} \\ a_{13} + 2a_{23} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AT_2},$$

одакле је $a_{13} + 2a_{23} = 0$ и $a_{11} + 4a_{12} + 4a_{22} = 0$. За $a = \frac{1}{4}a_{11}$ и $b = a_{23}$ имамо $a_{13} = -2b$, $a_{12} = -b$, $a_{33} = -4a + 4b$, $a_{22} = -a + b$, односно

$$G' \propto \begin{pmatrix} 4a & -b & -2b \\ -b & -a+b & b \\ -2b & b & -4a+4b \end{pmatrix}.$$

Детерминанта је $\det G' = 16a^3 - 32a^2b + 20ab^2 - 4b^3 = 4(a-b)(2a-b)^2$, тако да не одговарају само $b = a$ и $b = 2a$. Почетна коника очигледно има $a = 0, b = 1$, а другу конкретну конику можемо добити са $a = 1, b = 0$ што даје $4x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 = 0$. $\triangle$

Пример 5.28. Одредити једначину круга $x^2 + y^2 = 1$ у координатном систему са базним тачкама $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$, $A_3(-1, 0)$, $B(0, -1)$.

Како знамо старе и нове координате на тачкама A_1, A_2, A_3, B то можемо пронаћи матрицу везе. Приметимо да задатак захтева слику конике, те је захвалније тражити матрицу M за коју је $\lambda X = MX'$. За тачку A_1 имамо $(1 : 0 : 1) \mapsto (1 : 0 : 0)$, одакле је $m_{31} = m_{11}$, $m_{21} = 0$. За тачку A_2 имамо $(0 : 1 : 1) \mapsto (0 : 1 : 0)$, одакле је $m_{12} = 0$, $m_{32} = m_{22}$. За тачку A_3 имамо $(-1 : 0 : 1) \mapsto (0 : 0 : 1)$, одакле је $m_{33} = -m_{13}$, $m_{23} = 0$. Коначно за тачку B је $(0 : -1 : 1) \mapsto (1 : 1 : 1)$, одакле добијамо $m_{11} + m_{12} + m_{13} = 0$, $m_{31} + m_{32} + m_{33} = -m_{21} - m_{22} - m_{23}$, што даје $m_{13} = -m_{11}$ и $m_{22} = -m_{11}$. Тако смо добили матрицу

$$M \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

из које читамо везу $\lambda x_1 = x'_1 - x'_3$, $\lambda x_2 = -x'_2$, $\lambda x_3 = x'_1 - x'_2 + x'_3$ коју мењамо у једначину круга $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$. Добивамо $(x'_1 - x'_3)^2 + (-x'_2)^2 - (x'_1 - x'_2 + x'_3)^2 = 0$, што после сређивања постаје $2x'_1x'_2 - 4x'_1x'_3 + 2x'_2x'_3 = 0$, односно хипербола $x'u' - 2x' + u' = 0$. $\triangle$

Пример 5.29. Нови хомогени координатни систем за базне тачке има $A_1(2, 0)$, $A_2(0, 2)$, $A_3(3, 1)$, $B(-1, 1)$. Коника Γ садржи тачке A_1, A_2, A_3, B и додирује x -осу у старом афинном систему. Одредити једначину конике Γ у новом систему.

Како знамо старе и нове координате на тачкама A_1, A_2, A_3, B рачунамо матрицу M промене координата $\lambda X = MX'$. За тачку A_1 имамо $(2 : 0 : 1) \mapsto (1 : 0 : 0)$, одакле је $m_{11} = 2m_{31}$, $m_{21} = 0$. За тачку A_2 имамо $(0 : 2 : 1) \mapsto (0 : 1 : 0)$, одакле је $m_{12} = 0$, $m_{22} = 2m_{32}$. За тачку A_3 имамо $(3 : 1 : 1) \mapsto (0 : 0 : 1)$, одакле је $m_{23} = m_{33}$, $m_{13} = 3m_{33}$. Коначно за тачку B је $(-1 : 1 : 1) \mapsto (1 : 1 : 1)$, одакле добијамо $-(m_{11} + m_{12} + m_{13}) = m_{21} + m_{22} + m_{23} = m_{31} + m_{32} + m_{33}$. Након мало рачуна добијамо

$$M \propto \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Наша тангента је x -оса, која има координате $U[0 : 1 : 0]$, те применом $U' = M^T U$ добијамо њену слику $U'[0 : 2 : -1]$ која је тангента у новим координатама. Једначина конике у новом систему је општег облика

$$a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' = 0.$$

Из $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1) \in \Gamma$ следи $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Приде је $[0 : 2 : -1]$ тангента у тачки $(1 : 0 : 0)$, самим тим њена полара, одакле важи

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

што даје $a_{12} = -2a_{13}$. Из услова $(1 : 1 : 1) \in \Gamma$ добијамо $a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$, односно $a_{23} = a_{13}$. Одавде добијамо тражену једначину конике $2x'_1x'_2 - x'_1x'_3 - x'_2x'_3 = 0$.

Ово је био најбржи пут ка решењу. Алтернативно, можемо тражити једначину оригиналне конике и добити $x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 = 0$, те онда даље пресликавати. Време можемо изгубити и тражећи директну трансформацију која има матрицу

$$M^{-1} \propto \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

да бисмо тек онда схватили да је за пресликавање конике потребан њен инверз. $\triangle$

Пример 5.30. Нека колинеација f преводи тачке $A_1(1 : 0 : 1)$, $A_2(1 : 0 : 0)$, $A_3(0 : 1 : 0)$, $B(2 : 1 : 1)$ редом у базне тачке. Нека је Γ парабола која припада фамилији коника $\{x_1^2 + 4x_2^2 + ax_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0 : a \in \mathbb{R}\}$. Одредити слику од Γ при колинеацији f .

Пронађимо све параболе из дате фамилије коника. Услов додира са $x_3 = 0$ доноси двоструко решење квадратне једначине $x_1^2 + 2ax_1x_2 + 4x_2^2 = 0$, односно нула дискриминанту, што је еквивалентно услову $a^2 = 4$. Ово је потребан услов, док је довољан услов регуларност матрице наше конике

$$G \propto \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 4 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

Како је $\det G = -a^3 + 8a - 8$, то морамо искључити случај $a = 2$, те преостаје $a = -2$ када је $\det G = -16 \neq 0$, односно $\Gamma: x_1^2 + 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$. Са друге стране можемо потражити матрицу A за коју је $\lambda X = AX'$, што ће рећи матрица колинеације f^{-1} . Како су дате тачке темена четворотеменика то је по Основној теореме колинеације матрица A једнозначно одређена до на сразмерност. На пример, видимо да матрица

$$A \propto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

испуњава тажене везе између четири пара тачака. Заменом оригинала сликама у једначину конике или применом формуле $G' = A^TGA$ добијамо

$$G' \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Одавде тражена слика конике Γ има једначину $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 = 0$. $\triangle$

Пример 5.31. Дате су праве $a: x_1 = 0$, $b: x_2 = 0$, $c: x_3 = 0$ и тачке $P(1 : 1 : 1)$ и $Q(1 : 2 : 3)$. Ако је f колинеација задата са $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$ и $f(P) = Q$, одредити слику $f(\Gamma)$ ако је коника $\Gamma: x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 = 0$.

Да бисмо колинеацијом f пресликали конику потребна нам је матрица M за коју је $\lambda X = MX'$, односно инверзна матрица од f , где се праве сликају са $\lambda U' = M^T U$. Из $[1 : 0 : 0] \mapsto [0 : 1 : 0]$ имамо $m_{11} = m_{13} = 0$, из $[0 : 1 : 0] \mapsto [0 : 0 : 1]$ је $m_{21} = m_{22} = 0$, док из $[0 : 0 : 1] \mapsto [1 : 0 : 0]$ добијамо $m_{32} = m_{33} = 0$. Имајући у виду $f(P) = Q$, односно $M\vec{Q} \propto \vec{P}$, следи $m_{12} = 2m_{31}$, $m_{23} = 3m_{31}$, што одређује матрицу

$$M \propto \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

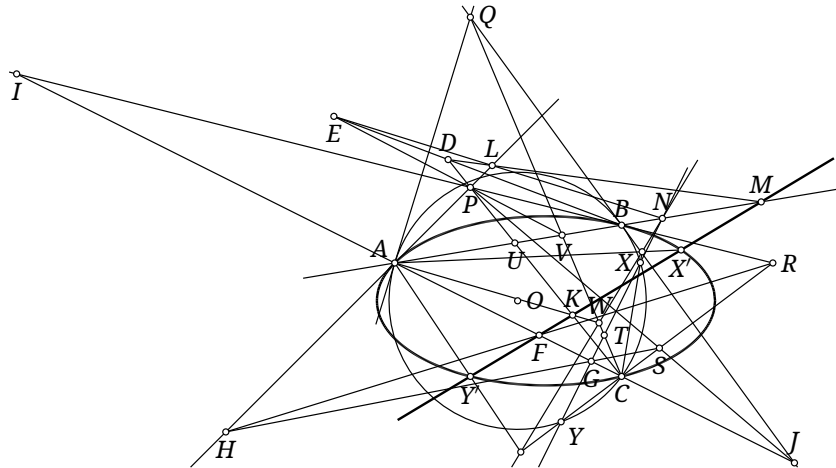
односно формуле $\lambda x_1 = 3x'_2$, $\lambda x_2 = 2x'_3$, $\lambda x_3 = 6x'_1$. Ако је G матрица конике Γ онда тражена коника у слици има матрицу $G' = M^T G M$, али је једноставније заменити формуле у једначину конике за $(3x'_2)^2 + 2(2x'_3)^2 + 3(6x'_1)^2 + 4(3x'_2)(2x'_3) = 0$, односно $108x_1^2 + 9x_2^2 + 8x_3^2 + 24x_2x_3 = 0$. $\triangle$

5.6 Разни примери

Пример 5.32. Конструисати пресек праве t са коником Γ .

Коника се уобичајено задаје са пет елемената. Претпоставимо да имамо три тачке конике $A, B, C \in \Gamma$ и две тангенте $a \ni A, b \ni B$. Уколико су дати неки други елементи до наведених елемената долазимо применама Паскалове или Бријаншонове теореме, али ове теореме нам не могу суштински решити задатак.

Приметимо да лењиром и шестаром можемо да конструишемо круг, али не и конику, док са друге стране можемо конструисати произвољно много тачака конике. Такође, конструкција лењиром и шестаром подразумева да можемо конструисати пресек праве и круга, док је за конструкцију пресека праве и конике потребно више труда који следи. Основна идеја је пронаћи колинеацију која конику пресликава на круг. Колинеација пресликава тангенте у тангенте, које су у случају круга нормале на одговарајући полупречник. Ако претпоставимо да наша колинеација фиксира тачке A, B, C долазимо до тога да тачка $P = a \wedge b$ иде у сециште Q тангенти у тачкама A и B на круг k описан око троугла ABC . Дакле, ако је O центар описаног круга троугла ABC , тачка Q је сециште нормале из A на OA и нормале из B на OB .



По Основној теореме колинеације, колинеација је једнозначно задата на два четвортеменика, тако да f дефинишемо са $(A, B, C, P) \mapsto (A, B, C, Q)$. Коника Γ је једнозначно одређена тачкама A, B, C које су фиксне и тангентама PA и PB које се сликају у QA и QB . Међутим, $A, B, C \in k$, док су QA и QB тангенте на k чиме је коника једнозначно одређена, односно важи $f(\Gamma) = k$. Уколико је t произвољна права, преостаје нам да пронађемо праву $f(t)$, затим да њом пресечемо круг k за $k \cap f(t)$ и онда одредимо $f^{-1}(k \cap f(t))$.

Како су тачке A и B фиксне, то је AB фиксна права. Рестрикција f на њу је хиперболички пројективитет са фиксним A и B . Знамо да је $AB \wedge CP = U \mapsto V = AB \wedge CQ$, а питамо се шта је слика тачке $M = AB \wedge t$. Хиперболички пројективитет можемо представити као композицију два перспективитета. Најпре узимамо произвољно $D \in UPC$, при чему теоретски може бити $D = C$, али је практично боље изабрати погоднију тачку (да слика не изађе ван папира). Затим постављамо $E = VP \wedge BD$ и правимо пројективитет $f_1 = (AB) \stackrel{D}{\parallel} (AP) \stackrel{E}{\parallel} (AB)$. Како је A заједничка за домene и кодомene она је фиксна, а како за центре перспективитета имамо $B \in DE$ то је и B фиксна.

По самој конструкцији имамо $U \mapsto P \mapsto V$, тако да смо по Основној теореми пројективитета раставили $f|_{AB} = f_1$. Ако поставимо $L = MD \wedge AP$ и $N = EL \wedge AB$, добијамо $M \mapsto L \mapsto N$, односно $f(M) = N$.

Ово можемо поновити за фиксну праву AC . Знамо да је $AC \wedge BP = I \mapsto J = AC \wedge BQ$, а питамо се шта је слика тачке $F = AC \wedge t$. Узимамо произвољно $R \in IPB$, при чему може бити $R = B$, те $S = JP \wedge CR$ и правимо пројективитет $f_2 = (AC)_{\wedge}^R(AP)_{\wedge}^S(AC)$. Ово обезбеђује да f_2 има фиксне тачке A и B , као и $I \mapsto P \mapsto J$, те добијамо $f|_{AC} = f_2$. Ако поставимо $H = FR \wedge AP$ и $G = SH \wedge AC$, добијамо $F \mapsto H \mapsto G$, односно $f(F) = G$.

За сада смо пронашли $(M, F) \mapsto (N, G)$, те је права NG слика праве $t = MF$. У слици сечемо праву и круг, рецимо $k \cap NG = \{X, Y\}$ (уколико пресек не постоји онда Γ и t немају пресек), те преостаје да пронађемо $f^{-1}(X)$ и $f^{-1}(Y)$. Како је $PC \mapsto QC$, то је $MF \wedge PC = K \mapsto T = NG \wedge QC$, одакле можемо раставити пројективитет $(M, K, F) \mapsto (N, T, G)$. На пример, за $W = AK \wedge CT$, постављамо $f_3 = (MF)_{\wedge}^A(WN)_{\wedge}^C(NG)$, где је $(M, K, F) \mapsto (N, W, ?) \mapsto (N, T, G)$, те мора бити $f_3 = f|_t$. Сада добијамо $X_1 = XC \wedge WN$ и $X' = X_1A \wedge MF$, односно $Y_1 = YC \wedge WN$ и $Y' = Y_1A \wedge MF$. Овако долазимо до тражених пресека $X' = f^{-1}(X)$ и $Y' = f^{-1}(Y)$ конике Γ и праве t . $\triangle$

Пример 5.33. Пројективна колинеација Папосове равни има тачно a фиксних тачака. Колики је број тачака у тој равни уколико је а) $a = 6$; б) $a = 7$; в) $a = 8$?

У Папосовој равни важи Основна теорема колинеације по којој уколико пројективна колинеација има фиксна темена четворотеменика она мора бити идентитет. Идентитет је могућ само уколико је број тачака облика $r^2 + r + 1$, што се дешава само под б) кад је $r = 2$. У супротном нема фиксних темена четворотеменика, те за $a \geq 4$ постоје три колинеарне фиксне тачке. Рестрикција колинеације на одговарајућу праву даје пројективитет који има три фиксне тачке, те по Основној теореми пројективитета мора бити идентитет. Дакле, у овом случају раван мора имати осу, те је у питању перспективна колинеација. Како је број фиксних тачака коначан перспективна колинеација мора бити коначна и имати неки ред r , а број тачака на свакој правој онда износи $r + 1$. Перспективна колинеација може бити хомологија која има центар ван осе и тада је $a = (r + 1) + 1$, односно елација која има центар на оси и тада је $a = r + 1$. Дакле, уколико колинеација није идентитет, онда је хомологија у равни реда $a - 2$ или елација у равни реда $a - 1$. Додатно, пројективна раван не може бити реда 6, рецимо по Брук-Рајзер теореми (Теорема 2.16). Када одредимо ред r пројективне равни она мора имати $r^2 + r + 1$ тачака тако да је све спремно за одговоре. а) Могућа је хомологија у равни реда 4 ($\mathbb{F}_4\mathbf{P}^2$) која има 21 тачку или елација у равни реда 5 ($\mathbb{Z}_5\mathbf{P}^2$) која има 31 тачку. б) Могућ је идентитет у равни реда 2 (Фаноова раван) која има 7 тачака или хомологија у равни реда 5 ($\mathbb{Z}_5\mathbf{P}^2$) која има 31 тачку. в) Могућа је једино елација у равни реда 7 ($\mathbb{Z}_7\mathbf{P}^2$) која има 57 тачака. $\triangle$

Пример 5.34. Израчунати број перспективних колинеација Дезаргове равни реда n .

Перспективне колинеације f Дезаргове равни генеришу се по Теорему 4.7. Оса s може бити било која права, те је бирамо на $n^2 + n + 1$ начина. Затим бирамо центар S , што даје $n + 1$ начин за елацију или n^2 начина за хомологију. На крају фиксирамо произвољну тачку $A \notin (s) \cup \{S\}$ која се слика у тачку са праве $A \vee S$ при чему не може отићи ни у S , ни у $(A \vee S) \wedge s$ (јер су то фиксне тачке), али ни у A (јер је $f \neq 1$), што даје $n - 1$ начина за елацију, односно $n - 2$ за хомологију. Множењем одговарајућих бројева добијамо $(n - 1)(n + 1)(n^2 + n + 1)$ елација и $n^2(n - 2)(n^2 + n + 1)$ хомологија, што у збиру даје $(n^3 - n^2 - 1)(n^2 + n + 1)$ перспективних колинеација. $\triangle$

Пример 5.35. Израчунати број (потпуних) тротеменика, четворотеменика и петотеменика, као и број хомологија, елација и недегенерисаних коника Фаноове равни.

Фаноова раван има 7 тачака и 7 правих. Број неуређених тројки тачака износи $7 \cdot 6 \cdot 5 / 3! = 35$, док оних тројки где су тачке колинеарне има колико и правих, односно

7, тако да је број тротеменика $35 - 7 = 28$. Тачке Фаноове равни које нису темена неког четворотеменика су његове дијагоналне тачке, а оне су колинеарне јер је сваки четворотеменик анти-Фаноов, тако да постоји бијекција између четворотеменика и правих, те је број четворотеменика једнак 7. За произвољних 5 тачака, кроз недостајуће две тачке пролази укупно 5 правих, тако да постоје две тројке колинеарних тачака у почетној фигури, што значи да у Фаноовој равни не постоји петотеменик. Фаноова раван је Дезаргова, те из Задатка 5.34 за $n = 2$ имамо 21 елацију, док хомологије не постоје. Недегенерисана коника Фаноове равни састоји се од три сецишта одговарајућих правих, односно у питању је тротеменик, те је тражени број 28. $\triangle$

АФИНА ГЕОМЕТРИЈА

Еуклидска геометрија се често користи као средство за учење аксиоматског метода (видети Секцију 2.1) Међутим, еуклидска геометрија садржи прилично подразумеваних појмова као што су инциденција, растојање, дужина, угао, непрекидност, распоред. Ако уклонимо све ове појмове, а задржимо само појам инциденције, приметићемо да је преостала геометрија и даље прилично очаравајућа и веома нетривијална.

Афина геометрија је уопштење еуклидске геометрије у којем заборављамо метричке концепте. Појам паралелних правих један је од кључних појмова који не зависе од метрике, тако да у афиној геометрији Плејферова аксиома (у пакету са аксиомама инциденције) игра значајну улогу. Реч *афина* потиче од Ојлера, који у својој књизи из 1748. године [25] користи латинску реч *affinis*, што значи сродно, односно повезано...

Афина геометрија може се развијати на два суштински еквивалентна начина. Први приступ је синтетички, ту је афини простор скуп тачака који је повезан са скупом правих, тако да је задовољен списак неких аксиома. Други приступ је аналитички, а његова основа је линеарна алгебра. Ми ћемо се овде више ослањати на овај други.

Криве и површи су скупови тачака са неким специфичним својствима и оне живе у простору који се састоји од тачака. Предмет нашег изучавања су геометријска својства која су инваријантна под одређеним трансформацијама, на пример, трансляцијама, ротацијама, пројекцијама. Како поставити модел тачака простора? Почетна идеја је узети векторски простор за модел простора тачака, али ово решење није задовољавајуће из бројних разлога. На пример, тачка која одговара нула вектору има посебно место као координатни почетак, док не постоји добар разлог зашто би нека тачка била привилегована. Затим, појам паралелности се може реализовати само на прилично неприродне начине...

Међутим, дубљи разлог је тај што векторски простор и афини простор поседују различите геометрије. Геометријска својства векторског простора су инваријантна под групом бијективних линеарних пресликавања, док су геометријска својства афиног простора инваријантна под групом бијективних афиних пресликавања, а те две групе нису изоморфне. Грубо говорећи, има више афиних неголи линеарних пресликавања.

Афини простор пружа геометријски боље окружење јер нам омогућава да радимо са тачкама, кривим и површама независно од избора координатног система. Наравно, координатни систем мора бити изабран да би се рачун спровео до краја, али важно је да се суздржимо од избора координатног система све док то не постане заиста неопходно.

Велику предност даје нам чињеница да скоро сваки афини концепт има свој пандан у неком концепту линеарне алгебре. Није лоше афини простор посматрати на-

глашавајући физичку интерпретацију где су честице представљене тачкама, а силе векторима. На пример, можемо посматрати честицу која се креће у тродимензионом простору, а желимо да опишемо путању те честице. Честицу представља тачка, док је положај те тачке одређен у односу на репер у $\mathbb{R}^3$ као вектор, док је репер уређен пар $(O, (e_1, e_2, e_3))$ где је тачка O координатни почетак, а (e_1, e_2, e_3) база.

На пример, стандардни репер у $\mathbb{R}^3$ има координатни почетак $O(0, 0, 0)$, док је база $e_1(1, 0, 0)$, $e_2(0, 1, 0)$, $e_3(0, 0, 1)$. Положај тачке X је дефинисан јединственим вектором од O ка X . У стандардном реперу тачка $X = (x_1, x_2, x_3)$ има вектор положаја $\vec{OX} = (x_1, x_2, x_3)$ што се поклапа са самом тачком, односно можемо рећи да се у стандардном реперу тачке и вектори идентификују.

Међутим, ствари се мењају ако посматрамо репер са другачијим координатним почетком $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, док базу (e_1, e_2, e_3) задржимо. Тада због $\vec{OX} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega X}$ и $\vec{O\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ имамо $\vec{\Omega X} = (x_1 - \omega_1, x_2 - \omega_2, x_3 - \omega_3)$, одакле видимо да се тачке не идентификују са векторима положаја, односно тачке нису вектори.

Тачке и особине тачака потребно је дефинисати тако да буду инваријантне у односу на репер. Погледајмо најпре како се понаша линеарна комбинација вектора. Нека су вектори $u(u_1, u_2, u_3)$ и $v(v_1, v_2, v_3)$ дати координатама у односу на базу $e = (e_1, e_2, e_3)$, тада $\alpha u + \beta v$ има координате $(\alpha u_1 + \beta v_1, \alpha u_2 + \beta v_2, \alpha u_3 + \beta v_3)$. Изаберимо нову базу $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, а са P означимо матрицу преласка са базе e на e' , односно за P важи $e' = eP$. Сада се вектори могу изразити на два начина, те је $eu = e'u'$, где u и u' представљају колона матрице са старим, односно новим координатама. Одавде је промена координата дата са $u = Pu'$, односно $u' = P^{-1}u$. Сада за линеарну комбинацију важи

$$\begin{pmatrix} \alpha u'_1 + \beta v'_1 \\ \alpha u'_2 + \beta v'_2 \\ \alpha u'_3 + \beta v'_3 \end{pmatrix} = \alpha P^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \beta P^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 \\ \alpha u_3 + \beta v_3 \end{pmatrix},$$

што значи да је линеарна комбинација вектора независна од избора базе.

Међутим, уколико са репера (O, e) пређемо на репер (Ω, e) , где је $\vec{O\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, тада тачка $A(a_1, a_2, a_3)$ мења координате у $(a'_1, a'_2, a'_3) = (a_1 - \omega_1, a_2 - \omega_2, a_3 - \omega_3)$, док их тачка $B(b_1, b_2, b_3)$ мења у $(b'_1, b'_2, b'_3) = (b_1 - \omega_1, b_2 - \omega_2, b_3 - \omega_3)$. Сада i -та координата ($i \in \{1, 2, 3\}$) од $\alpha a + \beta b$ у реперу (Ω, e) износи $\alpha a'_i + \beta b'_i = \alpha a_i + \beta b_i - (\alpha + \beta)\omega_i$ што се разликује од координате $\alpha a_i + \beta b_i - \omega_i$ у реперу (O, e) осим у случају кад је $\alpha + \beta = 1$. Овде се види кључна разлика између вектора и тачака. Линеарна комбинација вектора не зависи од базе, док линеарна комбинација тачака зависи од избора репера. Појам линеарне комбинације тачака може се спасити рестрикцијама које захтевају да сума коефицијената износи 1.

Можемо направити две копије од $\mathbb{R}^3$, где прва копија одговара тачкама (у смислу да заборављамо структуру векторског простора), а друга одговара векторима (овде је структура векторског простора важна). Заправо, векторски простор $\mathbb{R}^3$ дејствује на скуп тачака $\mathbb{R}^3$, тако што за сваку тачку $A = (a_1, a_2, a_3)$ и сваки вектор $v = (v_1, v_2, v_3)$ постоји тачка $A + v = (a_1 + v_1, a_2 + v_2, a_3 + v_3)$ коју доживљавамо као резултат транслације тачке A за вектор v . Ово дејство $+: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задовољава нека кључна својства. На пример $A + 0 = A$, док је $(A + u) + v = A + (u + v)$. Приде, за сваке две тачке A, B постоји јединствени вектор $\vec{AB}$ за који је $B = A + \vec{AB}$.

Ове особине су оно што нам је потребно да апстрактно уведемо појам афиног простора. Основна идеја је да посматрамо два различита скупа E и $\vec{E}$, где је E скуп тачака (без структуре), док је $\vec{E}$ векторски простор који дејствује на скуп E . Интуитивно можемо говорити о елементима из $\vec{E}$ чија сила помера тачке из E посматрајући их као честице. Ефекат примене силе $u \in \vec{E}$ на тачку $A \in E$ је транслација. Дакле, дејство силе $u \in \vec{E}$ је да сваку тачку $A \in E$ помери у тачку $A + u \in E$, при чему се реализује транслација која одговара вектору u . Како се транслације могу компоновати,

природно следи да је $\vec{E}$ векторски простор.

Као литературу можемо препоручити Галијеа¹ [32] као и скрипту коју су написали Калајџић² и Ђорић³ [44].

6.1 Афини простор и потпростор

Афини простор је тројка $(E, \vec{E}, +)$, где је E скуп тачака, $\vec{E}$ векторски простор транслација, $+$: $E \times \vec{E} \rightarrow E$ дејство за које важи:

$$(\forall A \in E) \quad A + 0 = A; \quad (6.1)$$

$$(\forall A \in E)(\forall u, v \in \vec{E}) \quad (A + u) + v = A + (u + v); \quad (6.2)$$

$$(\forall A, B \in E)(\exists! u \in \vec{E}) \quad B = A + u. \quad (6.3)$$

Јединствени вектор $u \in \vec{E}$ из (6.3) за који је $B = A + u$ краће обележавамо са $\overrightarrow{AB}$ или са $B - A$, тако да за свако $A, B \in E$ можемо писати

$$B = A + \overrightarrow{AB}.$$

Специјално, за $B = A$ је $A = A + \overrightarrow{AA}$, одакле из (6.1) следи $\overrightarrow{AA} = 0$. Такође, за свако $A \in E$ и $v \in \vec{E}$ важи

$$\overrightarrow{A(A+v)} = v,$$

јер је по (6.3) у питању јединствен вектор за који је $A + v = A + \overrightarrow{A(A+v)}$.

Из (6.2) добијамо $A + \overrightarrow{AC} = C = B + \overrightarrow{BC} = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ за произвољне три тачке $A, B, C \in E$, одакле (6.3) даје **Шалов идентитет**,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Специјално за $C = A$ је $0 = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$, односно $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Додатно, како је $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ то важи **закон паралелограма** који каже да је $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ако и само ако је $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Векторски простор $\vec{E}$ је **директриса афиног простора**, а **димензија афиног простора** је димензија његове директрисе, односно $\dim E = \dim \vec{E}$.

Интуитивно, скупови E и $\vec{E}$ представљају исте објекте, али посматране на различите начине. Избором произвољне тачке $A \in E$, која се може посматрати као координатни почетак, све тачке из E можемо добити као транслиране тачке $\{A + u : u \in \vec{E}\}$. Ову причу можемо формализовати на следећи начин.

За фиксирано $A \in E$ можемо дефинисати $f: \vec{E} \rightarrow E$ са $f(u) = A + u$, као и $g: E \rightarrow \vec{E}$ са $g(B) = \overrightarrow{AB}$. Тада је $u \xrightarrow{f} A + u \xrightarrow{g} \overrightarrow{A(A+u)} = u$, као и $B \xrightarrow{g} \overrightarrow{AB} \xrightarrow{f} A + \overrightarrow{AB} = B$, тако да имамо $g \circ f = 1_{\vec{E}}$ и $f \circ g = 1_E$, одакле је јасно да су f и g бијекције. Кад идентификујемо E са $\vec{E}$ преко пресликавања $g: B \mapsto \overrightarrow{AB}$, кажемо да је векторски простор постављен избором тачке A за координатни почетак. Ради једноставности често ћемо афини простор $(E, \vec{E}, +)$ обележавати само са E .

Треба бити пажљив са коришћењем симбола $+$. Сабирање $u + v$ је добро дефинисано за векторе $u, v \in \vec{E}$, као и транслација $A + v$ тачке $A \in E$ за вектор $v \in \vec{E}$. Међутим, сабирање $A + B$ тачака $A, B \in E$ нема смисла иако је ознака одузимање $B - A = \overrightarrow{AB}$ смислена.

Сваки векторски простор $\vec{E}$ има структуру афиног простора, тако што поставимо $E = \vec{E}$, док је дејство $+$ обично сабирање у векторском простору $\vec{E}$. Тако добијамо

¹Jean Henri Gallier (1949), француско-амерички математичар

²Гојко Калајџић (1948), српски математичар

³Мирјана Ђорић (1957), српска математичарка

афини простор $(\vec{E}, \vec{E}, +)$, као канонску афину структуру на $\vec{E}$. Посебно, у случају векторског простора $\mathbb{R}^n$, добијамо $\mathbb{A}^n = (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, +)$ **реални афини простор** димензије n . У општијој причи сваки векторски простор је над неким пољем $\mathbb{F}$, који не мора нужно бити $\mathbb{R}$ иако је то најчешћи случај са којим радимо, те тако добијамо афини простор $\mathbb{A}_{\mathbb{F}}^n = (\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n, +)$.

Међутим, афини простор не мора бити векторски простор, барем не на очигледан начин. На пример, нека је $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Скуп L можемо по дефиницији начинити афиним простором, тако што дефинишемо дејство $+: L \times \mathbb{R} \rightarrow L$ са $(x, y) + u = (x + u, y - u)$ за свако $u \in \mathbb{R}$. Одавде за произвољно $(x, y) \in L$ добијамо $(x + u) + (y - u) - 1 = x + y - 1 = 0$, те је $(x, y) + u \in L$, док се једноставно проверава да испуњава све три аксиоме.

Линеарна комбинација је основни концепт линеарне алгебре. Одговарајући концепт у афиној геометрији зовемо афина комбинација или барицентар. Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ скалари, а $A_1, A_2, \dots, A_k \in E$ тачке, тада за неко $B \in E$ можемо посматрати тачку $B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$. У мотивацији смо приметили да је неопходан неки додатни услов да би афина комбинација тачака имала смисла. Испоставља се да нам је потребан збир коефицијената једнак 1, тако да претпостављамо $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$. Имамо

$$\begin{aligned} B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{BA_i} &= B + \sum_{i=1}^k \alpha_i (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA_i}) = B + \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \right) \overrightarrow{BC} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{CA_i} \\ &= B + \overrightarrow{BC} + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{CA_i} = C + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{CA_i}, \end{aligned}$$

што показује да почетни израз не зависи од избора тачке B .

За фамилије тачака $A_i \in E$ и скалара $\alpha_i \in \mathbb{F}$ за $1 \leq i \leq k$, при чему је $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, дефинишемо **барицентар** као тачку

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i = B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$$

која не зависи од избора тачке $B \in E$. Барицентар је заправо афина комбинација тачака коју смо желели да дефинишемо, при чему не смо испустити из вида да је неопходан услов $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$. Често уместо појединачних фамилија говоримо о тежинским тачкама $(A_i, \alpha_i) \in E \times \mathbb{F}$, односно тачкама A_i које имају тежину α_i . Физички смисао се огледа у центру масе система од k тачака које имају свој положај и масу, при чему су масе нормализоване тако да је $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, док су и негативне масе такође дозвољене.

За барицентар $X = B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$ из (6.3) имамо $\overrightarrow{BX} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{BA_i}$, те уколико изаберемо баш $B = X$ добијамо $\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{XA_i} = 0$. У овој формули са барицентром битан је само однос тежина, јер се једначина без последица може помножити било којим скаларом.

У линеарној алгебри потпростор се може окарактерисати као непразан подскуп векторског простора који је затворен за линеарне комбинације. У афиним просторима, одговарајући појам је афини потпростор и можемо га природно дефинисати као подскуп тачака афиног простора који је затворен за афине комбинације, односно барицентре. **Афини простор** афиног простора $(E, \vec{E}, +)$ је подскуп V од E такав да за сваку фамилију $(A_i, \alpha_i) \in V \times \mathbb{F}$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ за коју је $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, важи $\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i \in V$.

У складу са дефиницијом празан скуп је тривијално афини потпростор, а није тешко приметити да је сваки пресек афиних потпростора такође афини потпростор.

Пример афиног потпростора може бити скуп $U \subset \mathbb{R}^2$ који је дефинисан са

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\},$$

где претпостављамо да a и b нису истовремено нула ($a^2 + b^2 > 0$). У питању је скуп решења једначине $ax + by + c = 0$, а потребно је доказати да за k тачака $(x_i, y_i) \in U$ и скалара α_i за које је $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$, важи $\sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i, y_i) \in U$.

Како $(x_i, y_i) \in U$ даје $ax_i + by_i + c = 0$, то сумирањем ових једначина помножених са α_i добијамо $\sum_{i=1}^k \alpha_i (ax_i + by_i + c) = 0$, односно $a \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i + b \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i + c \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0$. Због $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, тачка $(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i, y_i)$ задовољава $ax + by + c = 0$ и зато припада U , што доказује да је U афини потпростор од $\mathbb{A}^2$.

Афини потпростор U блиско је повезан са подскупом $\vec{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$, који је афини потпростор као специјални случај претходног рачуна за $c = 0$. $\vec{U}$ је скуп решења хомогене једначине $ax + by = 0$, а како смо услов $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ користили само уз c , без икаквих рестрикција за скалара α_i важиће $\sum_{i=1}^k \alpha_i (x_i, y_i) \in \vec{U}$, одакле је $\vec{U}$ векторски потпростор од $\mathbb{R}^2$. Додатно се може показати да за произвољну тачку $(x_0, y_0) \in U$ важи

$$U = (x_0, y_0) + \vec{U} = \{(x_0 + x_1, y_0 + y_1) : (x_1, y_1) \in \vec{U}\}.$$

Из $ax_0 + by_0 + c = 0$ и $ax_1 + by_1 = 0$ за $(x_1, y_1) \in \vec{U}$ је $a(x_0 + x_1) + b(y_0 + y_1) + c = 0$, те имамо $(x_0, y_0) + \vec{U} \subseteq U$. Са друге стране $(x, y) \in U$ повлачи $ax + by + c = 0$, те је $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, што даје $(x - x_0, y - y_0) \in \vec{U}$, из чега следи $(x, y) \in (x_0, y_0) + \vec{U}$, односно $U \subseteq (x_0, y_0) + \vec{U}$.

Дакле, афина права U (као решење једначине $ax + by + c = 0$) добијена је транс- лацијом њој паралелне праве $\vec{U}$ (са једначином $ax + by = 0$) која пролази кроз ко- ординатни почетак. Ова прича важи у општијем случају где се посматрају решења система линеарних једначина.

Сваки афини потпростор V афиног простора $(E, \vec{E}, +)$ може се видети као афини простор. Да бисмо одредили његову директрису посматрамо скуп $\vec{V}_B = \{\vec{BX} : X \in V\}$ за неко фиксирано $B \in V$. Линеарна комбинација у $\vec{V}_B$ је $\sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{BA}_i$, где $A_i \in V$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Међутим, $B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{BA}_i + (1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i) \vec{BB}$ је барицентар, одакле је $B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{BA}_i \in V$, те имамо $B(B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{BA}_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{BA}_i \in \vec{V}_B$, што доказује да је $\vec{V}_B$ потпростор од $\vec{E}$. За неко $C \in V$ имамо $\vec{CX} = \vec{BX} - \vec{BC} \in \vec{V}_B$, те је $\vec{V}_B = \vec{V}_C = \{\vec{XY} : X, Y \in V\}$, одакле природно важи $\vec{V} = \vec{V}_B$ и $(V, \vec{V}, +)$ је заиста један афини простор, где је $\vec{V}$ потпростор векторског простора $\vec{E}$.

Са друге стране, ако је $\vec{V}$ потпростор од $\vec{E}$ и $A \in E$, онда за тежишне тачке $(A + v_i, \alpha_i)$ где је $v_i \in \vec{V}$ и $\alpha_i \in \mathbb{F}$ важи $\sum_{i=1}^k \alpha_i (A + v_i) = A + \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{AA} + \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = A + \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$, одакле следи да је $V = A + \vec{V} = \{A + v : v \in \vec{V}\}$ афини потпростор од E .

Дакле, сваки афини потпростор афиног простора $(E, \vec{E}, +)$ је облика $A + \vec{V}$, где је $\vec{V}$ потпростор од $\vec{E}$. Потпростори од $\vec{E}$ су афини потпростори који садрже 0. Дејство $+: V \times \vec{V} \rightarrow V$ индуковано дејством $+: E \times \vec{E} \rightarrow E$ обезбеђује афину структуру $(V, \vec{V}, +)$ овом афином потпростору V . Афини потпростор димензије 1 зовемо **права**, а ди- мензије 2 зовемо **раван**. Афини потпростор кодимензије 1 зовемо **хиперраван**.

Кажемо да су афини потпростори U и V **паралелни** ако имају исте директрисе. Како је тада $\vec{U} = \vec{V}$, имамо $U = A + \vec{U}$ и $V = B + \vec{U}$ за произвољно $A \in U$ и $B \in V$, те је зато V добијено из U транс- лацијом за вектор $\vec{AB}$. За афине потпросторе различитих ди- мензија можемо дозволити и релаксиранију варијанту паралелности. Кажемо да су афини потпростори **ипаралелни** ако је директриса једног од њих садржана у дирек- триси оног другог, односно пишемо $U \parallel V$ ако и само ако је $\vec{U} \subseteq \vec{V}$ или $\vec{V} \subseteq \vec{U}$. Овако дефинисана релација паралелности јесте рефлексивна и симетрична, али не мора

бити транзитивна. Ако су потпростори дисјунктни, а нису паралелни, онда кажемо да су они **мимолазни**.

Права је одређена тачком $A \in E$ и ненула вектором $v \in \vec{E}$, односно у питању је скуп тачака облика $A + \alpha v$ за $\alpha \in \mathbb{F}$. Кажемо да су тачке $A, B, C \in E$ **колинеарне** ако су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ линеарно зависни. Раван је одређена тачком $A \in E$ и са два линеарно независна вектора $u, v \in \vec{E}$, односно то је скуп тачака облика $A + \alpha u + \beta v$ за $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Кажемо да су тачке A, B, C, D **копланарне** ако су вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ линеарно зависни.

За дати афини простор $(E, \vec{E}, +)$ и непразан подскуп $S \subset E$, најмањи афини потпростор који садржи S зовемо **афини омотач** скупа и обележавамо са $\langle S \rangle$. Афини омотач $\langle S \rangle$ је заправо пресек свих афиних потпростора који садрже S , а очигледно се ради о скупу свих барицентара за тачке из S . Дакле, за фамилију тачака $A_1, \dots, A_k \in E$ афини омотач је афини потпростор

$$\langle A_1, \dots, A_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i A_i : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}.$$

Ову теорију афиних простора можемо повезати са аксиомама еуклидске (синтетичке) геометрије. На пример, свака права је инцидентна са бар две тачке, јер правој $A + \alpha v$ припадају тачке које су добијене за елементе $0, 1 \in \mathbb{F}$ који постоје у сваком пољу. Такође, ако две равни у тродимензионом простору ($\dim \vec{E} = 3$) имају заједничку тачку онда имају бар још једну заједничку тачку. Наиме, из Грасманове формуле $\dim(\vec{U} \cap \vec{V}) = \dim \vec{U} + \dim \vec{V} - \dim(\vec{U} + \vec{V})$ за равни U и V имамо $\dim \vec{U} = \dim \vec{V} = 2$, те како је $\vec{U} + \vec{V} \leq \vec{E}$ добијамо $\dim(\vec{U} \cap \vec{V}) = 4 - \dim(\vec{U} + \vec{V}) \geq 1$.

6.2 Афина пресликавања

Афино пресликавање је пресликавање које чува барицентре. Прецизније, за афине просторе $(E, \vec{E}, +)$ и $(E', \vec{E}', +')$ чије су директрисе над истим пољем, пресликавање $f: E \rightarrow E'$ је афино ако за све тежишне тачке $(A_i, \alpha_i) \in E \times \mathbb{F}$, где је $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, важи

$$f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i\right) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(A_i).$$

Теорема 6.1. Ако је $h: \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ линеарно пресликавање, њада је за фиксирано $A \in E$ и $B \in E'$ са $f(A + v) = B + h(v)$ дефинисано афино пресликавање $f: E \rightarrow E'$.

Доказ. За $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ имамо

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i A_i\right) &= f\left(A + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{AA_i}\right) = B + h\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{AA_i}\right) = B + \sum_{i=1}^k \alpha_i h(\overrightarrow{AA_i}) \\ &= B + \sum_{i=1}^k \alpha_i \overrightarrow{B(B + h(\overrightarrow{AA_i}))} = \sum_{i=1}^k \alpha_i (B + h(\overrightarrow{AA_i})) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(A + \overrightarrow{AA_i}) = \sum_{i=1}^k \alpha_i f(A_i). \end{aligned}$$

Дакле, пресликавање f је затворено за барицентре, те је оно афино. $\square$

Теорема 6.2. За свако афино пресликавање $f: E \rightarrow E'$, постоји јединствено линеарно пресликавање $\vec{f}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ њакво да је $f(A + v) = f(A) + \vec{f}(v)$, за свако $A \in E$ и свако $v \in \vec{E}$.

Доказ. Ако пресликавање $\vec{f}$ постоји, мора бити $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}$. Овај израз не зависи од избора тачке A јер из $B + v = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A(A+v)} + (-1)\overrightarrow{AA} = B + (A+v) + (-1)A$ следи $f(B+v) = f(B) + f(A+v) + (-1)f(A)$, одакле добијамо

$$\overrightarrow{f(B)f(B+v)} = \overrightarrow{f(B)f(A+v)} - \overrightarrow{f(B)f(A)} = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}.$$

Како $\vec{f}$ морамо дефинисати са $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(A)f(A+v)}$, јединственост је очигледна, те преостаје доказати да је $\vec{f}$ линеарно.

Како је $A + \alpha v = A + \alpha \overrightarrow{AA} + (1-\alpha)\overrightarrow{AA} = \alpha(A+v) + (1-\alpha)A$, то имамо једначину $f(A+\alpha v) = \alpha f(A+v) + (1-\alpha)f(A)$, одакле добијамо $f(A) + \vec{f}(\alpha v) = \alpha(f(A) + \vec{f}(v)) + (1-\alpha)f(A)$, те за множење скаларом добијамо $\vec{f}(\alpha v) = \alpha \vec{f}(v)$.

Слично, из $f(A+u+v) = f(1(A+u) + 1(A+v) + (-1)A) = f(A+u) + f(A+v) - f(A)$ имамо $f(A) + \vec{f}(u+v) = (f(A) + \vec{f}(u)) + (f(A) + \vec{f}(v)) - f(A)$, одакле за сабирање вектора важи $\vec{f}(u+v) = \vec{f}(u) + \vec{f}(v)$. Дакле, $\vec{f}$ је затворено за множење скаларом и сабирање, тако да јесте линеарно. $\square$

Линеарно пресликавање $\vec{f}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}'$ зовемо **линеарни гео** афиног пресликавања f . Вреди напоменути да услов $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$ сада можемо еквивалентно записати (заменом $v = \overrightarrow{AB}$) као $f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ или

$$\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}. \quad (6.4)$$

Такође, ако је f инјективно или сурјективно онда је такво и $\vec{f}$.

Како афино пресликавање чува барицентре и како је афини потпростор затворен за барицентре, слика $f(V)$ афиног потпростора V јесте афини потпростор од E' . На пример, слика праве је тачка или права, док слика равни може бити тачка, права или раван. Афина пресликавања имају доста инваријанти, а пре свега ту је колинеарност тачака. Чување барицента заправо говори да се чувају и односи у којем тачка дели дуж. Додатно, из дефиниције лако видимо да се чува и паралелност. Дакле, афино пресликавање чува: барицентре, афине потпросторе, колинеарност, однос дељења дужи и паралелност.

Афину независност можемо схватити као уопштење линеарне независности. За фамилију тачака $A_0, A_1, \dots, A_n$ из E кажемо да је **афино независна** ако су вектори $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}$ линеарно независни. Линеарна независност ових вектора не зависи од пермутације тачака, јер за $i \neq 0$ једначина

$$0 = \sum_{j \neq i} \alpha_j \overrightarrow{A_i A_j} = \sum_{j \neq i} \alpha_j \overrightarrow{A_i A_0} + \sum_{j \neq i} \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} = - \left(\sum_{j \neq i} \alpha_j \right) \overrightarrow{A_0 A_i} + \sum_{j \neq i, 0} \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j},$$

за линеарно независне $\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ даје $\alpha_j = 0$ за свако $j \neq i$ (најпре за свако $j \neq i, 0$, а онда из $\sum_{j \neq i} \alpha_j = 0$ следи и $\alpha_0 = 0$).

Ако су тачке $A_0, A_1, \dots, A_n \in E$ афино независне, онда вектори $\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$ чине базу у $\vec{E}$. Сваку тачку $X \in E$ можемо записати са $X = A_0 + \overrightarrow{A_0 X}$, те постоји јединствена уређена n -торка скалара $(x_1, \dots, x_n)$ таква да је $X = A_0 + x_1 \overrightarrow{A_0 A_1} + \dots + x_n \overrightarrow{A_0 A_n}$, што чини координате тачке у односу на $(A_0, (\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}))$. Како је

$$X = A_0 + \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0 A_i} = (1 - \sum_{i=1}^n x_i) A_0 + \sum_{i=1}^n x_i A_i,$$

то се и $X \in E$ може једнозначно раставити са $X = \sum_{i=0}^n \alpha_i A_i$, при чему је $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, где су смене $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$ и $\alpha_i = x_i$ за $i = 1, \dots, n$.

Нека је $(E, \vec{E}, +)$ афини простор. **Афини рејер** са координатним почетком A_0 је фамилија $(A_0, \dots, A_n)$ од $n + 1$ тачака из E тако да је $(A_0A_1, \dots, A_0A_n)$ база векторског простора $\vec{E}$. Уређени пар $(A_0, (A_0A_1, \dots, A_0A_n))$ такође зовемо **афини рејер**.

Теорема 6.3. *Ако је E афини простор димензије n и $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ афини рејер за E , тада за произвољни афини простор E' и било коју фамилију $(B_0, B_1, \dots, B_n)$ тачака из E' , постоји јединствено афино пресликавање $f: E \rightarrow E'$ такво да је $f(A_i) = B_i$ за $0 \leq i \leq n$.*

Доказ. Ако испуњава услове f мора бити такво да $f(\alpha_0 A_0 + \dots + \alpha_n A_n) = \alpha_0 B_0 + \dots + \alpha_n B_n$, где је $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$, што једнозначно дефинише афино пресликавање на E будући да је $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ афини репер. $\square$

Уз помоћ афиних репера, афина пресликавања могу се представити матрицама. Нека је $f: E \rightarrow E$ афино пресликавање. Тада имамо $f(A_0 + v) = f(A_0) + \vec{f}(v)$, односно

$$\overrightarrow{A_0 f(A_0 + v)} = \overrightarrow{A_0 f(A_0)} + \vec{f}(v) \quad (6.5)$$

Све векторе из (6.5) можемо изразити преко базних вектора са $v = \sum_{i=1}^n x_i \overrightarrow{A_0 A_i}$, те $\overrightarrow{A_0 f(A_0)} = \sum_{i=1}^n b_i \overrightarrow{A_0 A_i}$ и $\overrightarrow{A_0 f(A_0 + v)} = \sum_{i=1}^n y_i \overrightarrow{A_0 A_i}$. Ако те векторе запишемо преко координата са $X = (x_1, \dots, x_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$, $Y = (y_1, \dots, y_n)$ и третирамо као колона матрице, док са A обележимо матрицу линеарног пресликавања $\vec{f}$ у бази $(A_0A_1, \dots, A_0A_n)$, тада једначина (6.5) постаје једноставно $Y = AX + B$.

Није лоше напоменути да $f(A_0) \neq A_0$ повлачи $B \neq 0$. Такође, у општем случају f није линеарна трансформација, а јесте уколико има фиксну тачку.

Афина пресликавања чувају барицентре, те су и њихове композиције афина пресликавања. За $f: E \rightarrow E'$ и $g: E' \rightarrow E''$ је $g(f(A + v)) = g(f(A) + \vec{f}(v)) = g(f(A)) + \vec{g}(\vec{f}(v))$, одакле следи

$$\overrightarrow{g \circ f} = \vec{g} \circ \vec{f}.$$

Из линеарне алгебре знамо да скуп свих линеарних трансформација на неком векторском простору $\vec{E}$ чини линеарну групу $GL(\vec{E})$. У афиној геометрији посматрамо скуп свих бијективних афиних пресликавања $f: E \rightarrow E$ који обележавамо са $GA(E)$ и зовемо **афина група**. Како сваком $f \in GA(E)$ одговара неко $\vec{f} \in GL(\vec{E})$, то је $f \mapsto \vec{f}$ један хомоморфизам група $GA(E) \rightarrow GL(\vec{E})$.

Најједноставније линеарно пресликавање је константно пресликавање, али оно није бијективно. Тако долазимо до идентичког $\vec{f} = 1_{\vec{E}}$, што је основни пример за $\vec{f} \in GL(\vec{E})$. У том случају из формуле (6.4) имамо $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$, одакле закон правоугаоника даје $\overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)}$. Зато је f са идентичким линеарним делом заправо транслација за вектор $\overrightarrow{Af(A)}$ (што не зависи од избора тачке A).

Транслације су пресликавања $\tau_u \in GA(E)$ за $u \in \vec{E}$ дефинисана са $\tau_u(A) = A + u$ и тада је $u = \overrightarrow{A\tau_u(A)} = \overrightarrow{B\tau_u(B)}$. Композиција две транслације је такође транслација јер

$$(\tau_u \circ \tau_v)(A) = \tau_u(A + v) = (A + v) + u = A + (v + u) = \tau_{v+u}(A)$$

даје

$$\tau_u \circ \tau_v = \tau_{v+u}.$$

Скуп свих транслација $T(E)$ је подгрупа афине групе $GA(E)$, где је неутрал транслација за нула вектор $\tau_0 = 1_{\vec{E}}$. Штавише, како за $f \in GA(E)$ важи

$$(f \circ \tau_u \circ f^{-1})(A) = f(f^{-1}(A) + u) = f(f^{-1}(A)) + \vec{f}(u) = A + \vec{f}(u) = \tau_{\vec{f}(u)}(A),$$

то је

$$f \circ \tau_u \circ f^{-1} = \tau_{\vec{f}(u)},$$

што значи да је $T(E)$ нормална подгрупа од $GA(E)$.

Често је згодно да афино пресликавање има фиксну тачку. Наравно, транслација различита од τ_0 нема фиксних тачака, али важи следећа теорема.

Теорема 6.4. *За произвољно $P \in E$, свако $f \in GA(E)$ се на јединствен начин разлаже са $f = \tau_u \circ g$, где је $\tau_u \in T(E)$, а $g \in GA(E)$ такво да је $g(P) = P$.*

Доказ. Из услова теореме следи $f(P) = \tau_u(g(P)) = \tau_u(P) = P + u$, те мора бити $u = \overrightarrow{Pf(P)}$, што једнозначно одређује транслацију $\tau_u = \tau_{\overrightarrow{Pf(P)}}$, а како су у питању бијекције то имамо једнозначно $g = (\tau_{\overrightarrow{Pf(P)}})^{-1} \circ f = \tau_{\overrightarrow{f(P)P}} \circ f$. $\square$

У даљем тексту

$$\Phi_f = \{X \in E : f(X) = X\}$$

означава скуп свих фиксних тачака афиног пресликавања $f: E \rightarrow E$.

Уколико је Φ_f непразан, то за $P \in \Phi_f$ важи $f(X) = f(P + \overrightarrow{PX}) = f(P) + \overrightarrow{f(PX)} = P + \overrightarrow{f(PX)}$, те ако је додатно $X \in \Phi_f$ имамо $f(X) = X = P + \overrightarrow{PX}$, односно $\overrightarrow{f(PX)} = \overrightarrow{PX}$. Даље је $(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}})(\overrightarrow{PX}) = 0$, односно $\overrightarrow{PX} \in \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}}) \leq \vec{E}$. Дакле, скуп фиксних тачака $\Phi_f = P + \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}})$ је један афини потпростор чија је директриса $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}})$.

Ако је Φ_f празан, то за фиксирану тачку $P \in E$ и свако $v \in \vec{E}$ имамо $f(P + v) \neq P + v$. Тада је $f(P) + \overrightarrow{f(v)} \neq P + v$, односно $(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}})(v) \neq \overrightarrow{f(P)P}$ за свако v , одакле следи $\overrightarrow{f(P)P} \notin \text{Im}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}})$. Одавде је $\dim \text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}}) = n - \dim \text{Im}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}}) \geq 1$, односно $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}}) \neq \{0\}$.

Теорема 6.5. *Ако је $\Phi_f \neq \emptyset$ онда је Φ_f афини потпростор са директрисом $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}})$. Ако је $\Phi_f = \emptyset$ онда је $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}}) \neq \{0\}$.*

Како је $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(AB)}$, то за транслацију важи $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB}$, одакле следи паралелност $\langle A, B \rangle \parallel \langle f(A), f(B) \rangle$, односно транслација пресликава праву у њој паралелну праву. Поставља се природно питање да ли постоје још нека афина пресликавања која имају ову лепу особину. Паралелност праве и њене слике повлачи $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \lambda \overrightarrow{AB}$, односно $\overrightarrow{f(AB)} = \lambda \overrightarrow{AB}$, за неко $\lambda \in \mathbb{F}$.

Посматрајмо функцију $\lambda: \vec{E} \rightarrow \mathbb{F}$ дату са $\overrightarrow{f(x)} = \lambda(x)x$ за $x \in \vec{E}$. За линеарно независне $u, v \in \vec{E}$ имамо $\overrightarrow{f(u+v)} = \overrightarrow{f(u)} + \overrightarrow{f(v)}$, односно $\lambda(u+v)(u+v) = \lambda(u)u + \lambda(v)v$, те $(\lambda(u+v) - \lambda(u))u + (\lambda(u+v) - \lambda(v))v = 0$, одакле је $\lambda(u+v) = \lambda(u) = \lambda(v)$. Дакле, ако је слика сваке праве паралелна свом оригиналу тада је $\overrightarrow{f} = \lambda \mathbb{1}_{\vec{E}}$ за неко фиксирано $\lambda \neq 0$.

У случају $\lambda = 1$ такво афино пресликавање је транслација. У супротном имамо $\lambda \notin \{0, 1\}$ а како је $\text{Ker}(\overrightarrow{f} - \mathbb{1}_{\vec{E}}) = \text{Ker}((\lambda - 1) \mathbb{1}_{\vec{E}}) = \{0\}$, по Теорему 6.5 важи $\Phi_f \neq \emptyset$, те постоји фиксна тачка $S \in \Phi_f$. Коначно, $f \in GA(E)$ и $\overrightarrow{f} = \lambda \mathbb{1}_{\vec{E}}$ дају

$$f(X) = f(S + \overrightarrow{SX}) = f(S) + \overrightarrow{f(SX)} = S + \lambda \overrightarrow{SX}.$$

Пресликавање које је одређено са $\chi_{S,\lambda}(X) = S + \lambda \overrightarrow{SX}$ је **хомотеија** са центром S и коефицијентом λ .

Погледајмо рачун за композицију две хомотеије.

$$\begin{aligned} \chi_{S,\alpha} \circ \chi_{T,\beta}(X) &= \chi_{S,\alpha}(T + \beta \overrightarrow{TX}) = \chi_{S,\alpha}(T) + \overrightarrow{\chi_{S,\alpha}(\beta \overrightarrow{TX})} = S + \alpha \overrightarrow{ST} + \alpha \beta \overrightarrow{TX} \\ &= P + \overrightarrow{PS} + \alpha \overrightarrow{PT} - \alpha \overrightarrow{PS} + \alpha \beta \overrightarrow{PX} - \alpha \beta \overrightarrow{PT} \\ &= P + (1 - \alpha) \overrightarrow{PS} + \alpha(1 - \beta) \overrightarrow{PT} + \alpha \beta \overrightarrow{PX}. \end{aligned}$$

У случају да је $\alpha\beta \neq 1$ можемо изабрати барицентар

$$P = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}S + \frac{\alpha-\alpha\beta}{1-\alpha\beta}T,$$

што повлачи $(1-\alpha)\overrightarrow{PS} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{PT} = 0$, одакле следи

$$\chi_{S,\alpha} \circ \chi_{T,\beta}(X) = P + \alpha\beta\overrightarrow{PX} = \chi_{P,\alpha\beta}.$$

У случају да је $\alpha\beta = 1$ имамо

$$\chi_{S,\alpha} \circ \chi_{T,\beta}(X) = P + \overrightarrow{PX} + (1-\alpha)\overrightarrow{PS} + (\alpha-1)\overrightarrow{PT} = X + (1-\alpha)\overrightarrow{TS} = \tau_{(1-\alpha)\overrightarrow{TS}}(X).$$

У сваком случају како је $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$ то транслације и хомотетије $HT(E)$ увек имају линеарни део сразмеран идентитету и зато чине једну подгрупу од $GA(E)$.

6.3 Паралелно пројектовање

За два афина потпростора Π и Γ кажемо да су **суплементарни** уколико су такве њихове директрисе, односно уколико је $\overrightarrow{\Pi} \oplus \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{E}$. У том случају $w \in \overrightarrow{E}$ се једнозначно раставља са $w = \pi_1(w) + \pi_2(w)$ где је $\pi_1(w) \in \overrightarrow{\Pi}$ и $\pi_2(w) \in \overrightarrow{\Gamma}$. На пример, у афиној равни две праве су суплементарне ако и само ако нису паралелне. Сличну ствар можемо рећи за праву и раван у тродимензионом афином простору.

Суплементарни афини потпростори имају тачно једну заједничку тачку. Наиме, како је $\Pi = P + \overrightarrow{\Pi}$ и $\Gamma = Q + \overrightarrow{\Gamma}$ за $P \in \Pi$ и $Q \in \Gamma$, тада се $\overrightarrow{PQ} \in \overrightarrow{E}$ јединствено раставља са $\overrightarrow{PQ} = u + v$, где је $u \in \overrightarrow{\Pi}$, $v \in \overrightarrow{\Gamma}$. Тада је $Q = P + (u + v) = (P + u) + v$, одакле следи $Q - v = P + u = S \in \Pi \cap \Gamma$, те из $\overrightarrow{\Pi} \cap \overrightarrow{\Gamma} = \{0\}$ следи $\Pi \cap \Gamma = \{S\}$.

За произвољно $X \in E$ и суплементарне афине потпросторе Π и Γ можемо посматрати афини потпростор $\Gamma' = X + \overrightarrow{\Gamma} \parallel \Gamma$ који је суплементаран са Π и поставити $X' \in \Pi \cap \Gamma'$. У том случају је $\overrightarrow{SX} = \overrightarrow{SX'} + \overrightarrow{X'X}$ јединствено растављање у $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Pi} \oplus \overrightarrow{\Gamma}$ и важи $\langle X, X' \rangle \subseteq \Gamma'$. **Паралелно пројектовање** је пресликавање $X \mapsto X'$, односно $f: E \rightarrow \Pi \subset E$ задато са $f(S + w) = S + \pi_1(w)$, за свако $w \in \overrightarrow{E}$. Како је пројекција на векторским просторима линеарна, то је паралелно пројектовање афино пресликавање.

Паралелно пројектовање није бијективно и за њега важи $f^2 = f$. Можемо погодено изабрати базу тако да матрица паралелног пројектовања f , односно његовог линеарног дела $\overrightarrow{f}$, буде дијагонална матрица са нулама и јединицама на дијагонали, те минимални полоном за $\overrightarrow{f}$ износи $\lambda^2 - \lambda$.

Један од основних и најстаријих резултата афине геометрије је Талесова теорема. Погледајмо једно од могућих уопштења.

Теорема 6.6. Нека су H_1, H_2, H_3 три различите паралелне хиперравни афиног простора E , а Γ и Δ две праве које нису са њима паралелне. Ако је $\{A_i\} = \Gamma \cap H_i$ и $\{B_i\} = \Delta \cap H_i$, за $i \in \{1, 2, 3\}$, тада важи $\overrightarrow{A_1A_3} : \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{B_1B_3} : \overrightarrow{B_1B_2}$.

Доказ. Из паралелности хиперравни добијамо $\overrightarrow{H_1} = \overrightarrow{H_2} = \overrightarrow{H_3} = \overrightarrow{H}$, док $\dim \Gamma = 1$ и $\dim \Gamma + \dim H_i = \dim E$ дају $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Gamma} \oplus \overrightarrow{H}$. Од пројекције $\pi: \overrightarrow{E} = \overrightarrow{\Gamma} \oplus \overrightarrow{H} \rightarrow \overrightarrow{\Gamma}$ по Теорему 6.1 грађимо афино пресликавање $f: E \rightarrow \Gamma$ са $f(B_1 + v) = A_1 + \pi(v)$. Добијамо

$$\begin{aligned} f(B_i) &= f(B_1 + \overrightarrow{B_1B_i}) = A_1 + \pi(\overrightarrow{B_1B_i}) = A_1 + \pi(\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_i} + \overrightarrow{A_iB_i}) \\ &= A_1 + \pi(\overrightarrow{B_1A_1}) + \pi(\overrightarrow{A_1A_i}) + \pi(\overrightarrow{A_iB_i}) = A_1 + \overrightarrow{A_1A_i} = A_i, \end{aligned}$$

јер је $\pi(\overrightarrow{B_1A_1}) = \pi(\overrightarrow{A_iB_i}) = 0$ због $\overrightarrow{B_1A_1}, \overrightarrow{A_iB_i} \in \overrightarrow{H}$, а $\pi(\overrightarrow{A_1A_i}) = \overrightarrow{A_1A_i}$ због $\overrightarrow{A_1A_i} \in \overrightarrow{\Gamma}$. Зато је $f(B_1) = A_1, f(B_2) = A_2, f(B_3) = A_3$, те како афино пресликавање чува односе дељења дужи важиће тврђење теореме. $\square$

Обрат Талесове теореме доказује се директно. Ако је $\overrightarrow{SA_1} : \overrightarrow{SA_2} = \overrightarrow{SB_1} : \overrightarrow{SB_2} = \theta$, то је $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SA_1} = \theta\overrightarrow{SB_2} - \theta\overrightarrow{SA_2} = \theta(\overrightarrow{SB_2} - \overrightarrow{SA_2}) = \theta\overrightarrow{A_2B_2}$, одакле је $\langle A_1, B_1 \rangle \parallel \langle A_2, B_2 \rangle$.

6.4 Дилатација и трансвекција

Скуп фиксних тачака Φ_f за афину трансформацију $f \in GA(E)$ је афини потпростор. Најједноставније је $\Phi_f = E$ за $f = 1_E$. Посматрајмо по једноставности наредни случај када f фиксира n афино независних тачака, односно фиксира хиперраван $\Pi = \Phi_f$. Тада је f по Теорему 6.3 одређено још са $P \mapsto f(P) \neq P$, а ми се питамо како се слика тачка $X \notin \Pi$.

Уколико је $\langle P, X \rangle \cap \Pi = \{S\}$ тада се чувају односи $\overrightarrow{SX} : \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{Sf(X)} : \overrightarrow{Sf(P)}$, те је по Обратној Талесовој теорему $\langle P, f(P) \rangle \parallel \langle X, f(X) \rangle$. У супротном је $\langle P, X \rangle \parallel \Pi$, те постоје $A, B \in \Pi$ са $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{AB}$, одакле је $\overrightarrow{f(P)f(X)} = \overrightarrow{f(PX)} = \overrightarrow{f(AB)} = \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PX}$, те из закона правоугаоника важи $\overrightarrow{Pf(P)} = \overrightarrow{Xf(X)}$. Закључујемо да у сваком случају имамо паралелност

$$\langle P, f(P) \rangle \parallel \langle X, f(X) \rangle. \quad (6.6)$$

Даље дискутујемо случајеве у зависности да ли права $\langle P, f(P) \rangle$ сече хиперраван Π .

Трансформација код које постоји пресек $\langle P, f(P) \rangle \cap \Pi = \{P_0\}$ зовемо **дилатација**. У том случају из (6.6) следи да постоји и пресек $\langle X, f(X) \rangle \cap \Pi = \{X_0\}$, где је X_0 пројекција тачке X на хиперраван Π , паралелно правој $\langle P, f(P) \rangle$. Ако је $\alpha \in \mathbb{F}$ скалар за који је $\overrightarrow{P_0f(P)} = \alpha \overrightarrow{P_0P}$, тада како афино чува односе имамо $\overrightarrow{X_0X} : \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{f(X_0)f(X)} : \overrightarrow{f(P_0)f(P)}$, те добијамо $\overrightarrow{X_0f(X)} = \alpha \overrightarrow{X_0X}$. Сада је јасно где је $f(X)$, те нам је за дилатацију потребан коефицијент α , правац $Pf(P)$ и хиперраван Π . Погодним избором базе матрица линеарног дела дилатације има облик

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Трансформација код које је $\langle P, f(P) \rangle \parallel \Pi$ зовемо **трансвекција**. Из (6.6) можемо написати $\overrightarrow{f(X)} = \overrightarrow{X} + \lambda \overrightarrow{(X)Pf(P)}$, одакле за $X = S + v$ где је $S \in \Pi$ и $v \in \vec{E}$, имамо $f(X) = f(S + v) = S + \overrightarrow{f(v)} = S + v + \lambda(S + v)\overrightarrow{Pf(P)}$, односно $\overrightarrow{f(v)} = v + \lambda(S + v)\overrightarrow{Pf(P)}$. Није тешко уочити да је $\mu: \vec{E} \rightarrow \mathbb{F}$ дато са $\mu(v) = \lambda(S + v)$ једна линеарна форма и $\mu(v) = 0$ ако и само ако $v \in \vec{\Pi}$, при чему важи $\overrightarrow{f(v)} = v + \mu(v)\overrightarrow{Pf(P)}$. Погодним избором базе матрица линеарног дела трансвекције има облик

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6.5 Еуклидски афини простори

Афини простор $(E, \vec{E}, +)$ снабдевен скаларним производом $(\vec{E}, \cdot)$ (симетричност, компатибилност, дистрибутивност, позитивна дефинитност) постаје **еуклидски афини простор**. На овај начин сваком вектору $v \in \vec{E}$ придружујемо **интензитет**, $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. Скаларни производ омогућава нам појам ортогоналности, где за векторе $x, y \in \vec{E}$ кажемо да су **ортојонални** и пишемо $x \perp y$ ако и само ако је $x \cdot y = 0$.

Векторски потпростори $\vec{U}, \vec{V} \in \vec{E}$ су **ортојонални** и пишемо $\vec{U} \perp \vec{V}$ ако и само ако за свако $x \in \vec{U}$ и свако $y \in \vec{V}$ важи $x \perp y$. **Ортојонал** потпростора чини скуп свих вектора ортогоналних на њега $\vec{U}^\perp = \{x \in \vec{E} : x \perp \vec{U}\}$. Можемо приметити да је $\vec{U} \perp \vec{V}$ ако и само ако је $\vec{U} \leq \vec{V}^\perp$, односно ако и само ако је $\vec{V} \leq \vec{U}^\perp$.

За два афина потпростора Π и Γ кажемо да су **ортојонални** ако су такве њихове директрисе. Тада је $\bar{\Pi} \leq \bar{\Gamma}^\perp$, а уколико важи $\bar{\Pi} \geq \bar{\Gamma}^\perp$ онда су Π и Γ **ујавни**.

Ортојонално пројектовање је специјални случај паралелног пројектовања на афини потпростор Π кад пројектујемо паралелно са $\bar{\Pi}^\perp$. Ако је Π афини потпростор и $A \in E$ произвољна тачка, тада је $A + \bar{\Pi}^\perp$ јединствен потпростор кодимензије $\dim \Pi$ који садржи A и ортогоналан је на Π .

Теорема 6.7. *Права је ортојонална на раван ако и само ако је ортојонална на неке две њене непаралелне праве.*

Доказ. За $\Gamma_i = T_i + \text{Span}\{u_i\}$, $i = 1, 2$ услов $\Gamma_1 \nparallel \Gamma_2$ повлачи линеарну независност u_1 и u_2 , док $v \perp u_1, u_2$ даје $v \perp \text{Span}\{u_1, u_2\}$. $\square$

У еуклидској геометрији позната је **Теорема о три нормале**.

Теорема 6.8. *Нека је A произвољна тачка (тродимензионој еуклидској афиној простору) ван равни Π , и нека се права Δ налази у Π . Ако је B јодножје нормале из A на Π , а C јодножје нормале из B на Δ , тада је права AC нормална на Δ .*

Доказ. Из $\langle A, B \rangle \perp \Pi \supset \Delta$ следи $\langle A, B \rangle \perp \Delta$, те како је и $\langle B, C \rangle \perp \Delta$, из Теореме 6.7 имамо $\langle A, B, C \rangle \perp \Delta$, те и $\langle A, C \rangle \perp \Delta$. $\square$

Захваљујући скаларном производу уводимо **распојање** између тачака $A, B \in E$ са

$$\delta(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}.$$

Растојање има неке лепе особине, $\delta(A, B) \geq 0$, $\delta(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, $\delta(A, B) = \delta(B, A)$. Такође важи и неједнакост троугла $\delta(A, C) \leq \delta(A, B) + \delta(B, C)$, што је последица Коши-Шварцове неједнакости $x \cdot y \leq \|x\|\|y\|$, која следи из

$$0 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = 2 - 2 \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}.$$

6.6 Изометрије и симетрије

Под **изометријом** подразумевамо пресликавање $f: E \rightarrow E$ еуклидског простора које чува растојања, односно за свако $A, B \in E$ важи $\delta(f(A), f(B)) = \delta(A, B)$. За трансформације важи $\delta(\tau_v(A), \tau_v(B)) = \delta(A + v, B + v) = \|(A + v)(B + v)\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \delta(A, B)$, те су оне основни примери изометрија. Такође, композиција изометрија очигледно јесте изометрија.

За оператор $\vec{f}: \vec{E} \rightarrow \vec{E}$ кажемо да је **ортојоналан** ако чува скаларни производ, односно за свако $x, y \in \vec{E}$ важи $\vec{f}(x) \cdot \vec{f}(y) = x \cdot y$.

Теорема 6.9. *Пресликавање $f: E \rightarrow E$ је изометрија ако и само ако је f афина трансформација са ортојоналним линеарним делом $\vec{f}$.*

Доказ. Ако је f изометрија, фиксирамо $P \in E$ и дефинишемо $\vec{f}(v) = \overrightarrow{f(P)f(P+v)}$. Да би f било афино потребно је и довољно показати да је овако дефинисано $\vec{f}$ линеарно. Како је f изометрија имамо

$$\begin{aligned} \|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\| &= \|\overrightarrow{f(P)f(P+x)} - \overrightarrow{f(P)f(P+y)}\| = \|\overrightarrow{f(P+y)f(P+x)}\| \\ &= \|\overrightarrow{(P+y)(P+x)}\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Специјалан случај за $\vec{f}(0) = 0$ доноси једначину $\|\vec{f}(x)\| = \|x\|$, одакле добијамо $\|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\|^2 = \|\vec{f}(x)\|^2 - 2\vec{f}(x) \cdot \vec{f}(y) + \|\vec{f}(y)\|^2$ и $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \cdot y) + \|y\|^2$. Одавде следи $\vec{f}(x) \cdot \vec{f}(y) = x \cdot y$, те је $\vec{f}$ ортогонално. Из ортогоналности лако следи

$$\|\vec{f}(ax + \beta y) - a\vec{f}(x) - \beta\vec{f}(y)\|^2 = \|(ax + \beta y) - ax - \beta y\|^2 = 0,$$

што значи да је $\vec{f}$ линеарно. Обратно, уколико је f афино са ортогоналним $\vec{f}$, то имамо $\|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\| = \|x - y\|$, одакле $\|f(P+y)f(P+x)\| = \|(P+y)(P+x)\|$, те је f изометрија. $\square$

Изометрије су афина пресликавања, а Φ_f је један афини потпростор. Занима нас под којим условима транслација комутира са изометријом. Како је $f \circ \tau_v \circ f^{-1} = \tau_{\vec{f}(v)}$ то је комутативност еквивалентна са $\tau_{\vec{f}(v)} = \tau_v$, односно са $v \in \text{Ker}(\vec{f} - \mathbb{1}) = \Phi_f$. Дакле, транслација τ_v комутира са изометријом f ако и само ако је $v \in \Phi_f$.

Матрица линеарног дела изометрије је ортогонална матрица, те из $AA^T = \mathbb{1}$ закључујемо $\det A = \pm 1$. Ако је детерминанта позитивна ($\det A = 1$) кажемо да је изометрија **дирекћна**, док је у супротном (за $\det A = -1$) **индирекћна**.

Нека су $A, B \in E$ произвољне тачке. Размотримо шта је скуп свих тачака подједнако удаљених од њих, $\{X \in E : \delta(A, X) = \delta(B, X)\}$. Посматрајмо најпре праву $\langle A, B \rangle$ и тачке са ње, $X = \alpha A + (1 - \alpha)B$. Како је $\overrightarrow{AX} = (1 - \alpha)\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BX} = \alpha\overrightarrow{BA}$, то је $\|\overrightarrow{AX}\| = \|\overrightarrow{BX}\|$ ако и само ако је $|1 - \alpha| = |\alpha|$, односно кад је $\alpha = 1/2$, што одговара средишту дужи $S = (1/2)A + (1/2)B$.

Нека је P произвољна тачка за коју је $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$, а P_0 ортогонална пројекција из P на праву $\langle A, B \rangle$. Тада из $\|\overrightarrow{AP_0}\|^2 + \|\overrightarrow{P_0P}\|^2 = \|\overrightarrow{AP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP}\|^2 = \|\overrightarrow{BP_0}\|^2 + \|\overrightarrow{P_0P}\|^2$ закључујемо $\|\overrightarrow{AP_0}\| = \|\overrightarrow{BP_0}\|$, односно $P_0 = S$. Дакле, тражени скуп тачака је медијатриса дужи AB , односно хиперраван кроз $S = (1/2)A + (1/2)B$ ортогонална на праву $\langle A, B \rangle$.

Теорема 6.10. *Скуи свих тачака еуклидској афиној простора E које су подједнако удаљене од $A, B \in E$ је медијатриса дужи AB .*

Симетрија у односу на неки афини потпростор Π је пресликавање $\sigma_\Pi : X \mapsto X'$ за које важи да је ортогонална пројекција X_0 тачке X на Π средиште дужи XX' , односно $X_0 = (1/2)X + (1/2)X'$. Симетрија у односу на тачку ($\dim \Pi = 0$) је **централна**, у односу на праву ($\dim \Pi = 1$) је **осна**, а специјални случај симетрије кад је Π хиперраван ($\dim \Pi = n - 1$) зовемо **рефлексija**.

Докажимо да је симетрија изометрија. За фиксирано $P \in \Pi$ важи $\overrightarrow{PX'} = 2\overrightarrow{PX_0} - \overrightarrow{PX}$. Ортогонална пројекција π на потпростор Π је афина (али није изометрија), одакле је $\overrightarrow{\sigma_\Pi} = 2\overrightarrow{\pi} - \mathbb{1}$, те је $\overrightarrow{\sigma_\Pi}$ линеарно. Како је $\overrightarrow{\pi}(x) - x = \overrightarrow{XX_0} \perp \Pi \supseteq \text{Span}\{\overrightarrow{\pi}(x), \overrightarrow{\pi}(y)\}$ и слично $\overrightarrow{\pi}(y) - y \perp \text{Span}\{\overrightarrow{\pi}(x), \overrightarrow{\pi}(y)\}$, то имамо

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma_\Pi}(x) \cdot \overrightarrow{\sigma_\Pi}(y) &= (2\overrightarrow{\pi}(x) - x) \cdot (2\overrightarrow{\pi}(y) - y) \\ &= (\overrightarrow{\pi}(x) + (\overrightarrow{\pi}(x) - x)) \cdot (\overrightarrow{\pi}(y) + (\overrightarrow{\pi}(y) - y)) \\ &= \overrightarrow{\pi}(x) \cdot \overrightarrow{\pi}(y) + (\overrightarrow{\pi}(x) - x) \cdot (\overrightarrow{\pi}(y) - y) \\ &= (\overrightarrow{\pi}(x) - (\overrightarrow{\pi}(x) - x)) \cdot (\overrightarrow{\pi}(y) - (\overrightarrow{\pi}(y) - y)) = x \cdot y, \end{aligned}$$

одакле је $\overrightarrow{\sigma_\Pi}$ ортогонално, те Теорема 6.9 повлачи да је σ_Π изометрија.

У погодном изабраној бази матрица симетрије је дијагонална са вредностима ± 1 на дијагонали. Тада је $\det \overrightarrow{\sigma_\Pi} = (-1)^{n - \dim \Pi}$, те можемо дискутовати да ли је симетрија директна или индиректна. На пример, осна симетрија у тродимензионом простору је директна, док је свака рефлексija индиректна.

Теорема 6.11. *Изометрија је симетрија ако и само ако је инволуција.*

Доказ. Симетрија је инволуција, те претпоставимо да је изометрија f инволуција. За произвољну тачку $X \in E$ је $X \mapsto X' \mapsto X$, одакле следи $S = (1/2)X + (1/2)X' \mapsto S$. Скуп фиксних тачака $\Phi_f \ni S$ је непразан, а како је f изометрија то су фиксне тачке подједнако удаљене од X и X' , те по Теореме 6.10 припадају медијатриси Π дужи XX' . Дакле, имамо $\emptyset \neq \Phi_f \subseteq \Pi \perp \langle X, X' \rangle$, те је f симетрија у односу на Φ_f . $\square$

Под којим условима симетрија σ_Π комутира са изометријом f ? Како је σ_Π инволуција, то је $f \circ \sigma_\Pi \circ f^{-1}$ такође инволуција, те по Теореме 6.11, $f \circ \sigma_\Pi \circ f^{-1}$ је симетрија у односу на фиксне тачке $\Phi_{f \circ \sigma_\Pi \circ f^{-1}} = f\Phi_{\sigma_\Pi} = f\Pi$. Дакле, σ_Π и f комутирају ако и само ако је $f\Pi = \Pi$. На пример, трансляција τ_v комутира са σ_Π уколико је $v \parallel \Pi$.

Теорема 6.12. *Изометрија f је рефлексивна ако и само ако је Φ_f хиперраван.*

Доказ. Ако је Φ_f хиперраван изаберимо произвољно $X \notin \Phi_f$. За свако $P \in \Phi_f$ важи $\delta(P, X) = \delta(P, f(X))$, те P припада медијатриси Π дужи $Xf(X)$. Како је Π хиперраван која садржи све фиксне тачке то мора бити $\Pi = \Phi_f$, одакле је f рефлексивна. $\square$

У специјалном случају $n = 2$ претходна теорема значи да је f рефлексивна ако и само ако је индиректна и има фиксну тачку. Наиме, за $P \in \Phi_f$ и $X \notin \Phi_f$ важи да P припада медијатриси дужи $Xf(X)$ што је нека права Π . Пресликавање $\sigma_\Pi \circ f$ је директна изометрија као композиција две индиректне изометрије. Како директна изометрија није рефлексивна, а $\sigma_\Pi \circ f$ фиксира тачке P и X , те и хиперраван $\langle P, X \rangle$, то значи да има још фиксних тачака. Дакле $\Phi_{\sigma_\Pi \circ f} = E$, односно $\sigma_\Pi \circ f = 1$, одакле је $f = \sigma_\Pi$ рефлексивна.

Рефлексиве су основне градивне јединице изометрија. Уз стандардни (тополошки) договор да је $\dim \emptyset = -1$ можемо поставити следећу теорему.

Теорема 6.13. *Свака изометрија f је композиција не више од $n - \dim \Phi_f$ рефлексива.*

Доказ. База индукције је јасна јер за $\dim \Phi_f = n$ је $f = 1$, док је f за $\dim \Phi_f = n - 1$ по Теореме 6.12 рефлексивна. За корак индукције посматрамо $X \notin \Phi_f$, где је Φ_f садржано у медијатриси Π дужи $Xf(X)$. Нова изометрија $\sigma_\Pi \circ f$ фиксира све из Φ_f као и тачку X , те је $\dim \Phi_{\sigma_\Pi \circ f} > \dim \Phi_f$. На основу индукцијске претпоставке $\sigma_\Pi \circ f$ је композиција не више од $n - \dim \Phi_{\sigma_\Pi \circ f}$ рефлексива, те је $f = \sigma_\Pi \circ (\sigma_\Pi \circ f)$ композиција не више од $n + 1 - \dim \Phi_{\sigma_\Pi \circ f} \leq n - \dim \Phi_f$ њих, $\square$

Посебно, резултат ове теореме каже да уколико изометрија нема фиксних тачака онда је у питању композиција не више од $n + 1$ рефлексива, док је за $\Phi_f \neq \emptyset$ композиција не више од n рефлексива.

6.7 Класификација изометрија и сличности

Појам подударности у еуклидском афином простору можемо дефинисати помоћу еквиваленције

$$(A_0, A_1) \cong (B_0, B_1) \iff \delta(A_0, A_1) = \delta(B_0, B_1).$$

По узору на класични став ССС о подударности троуглова, то се даље уопштава на већи број тачака, те дефинишемо подударност $(A_0, A_1, \dots, A_k) \cong (B_0, B_1, \dots, B_k)$ ако и само ако за свако $0 \leq i, j \leq k$ важи $\delta(A_i, A_j) = \delta(B_i, B_j)$.

Ако је $(A_0, A_1, \dots, A_m)$ афино независни систем тачака и $(B_0, B_1, \dots, B_m)$ њему подударан систем, тада постоји изометрија f таква да је $f(A_i) = B_i$ за свако $0 \leq i \leq m$. Штавише, уколико је $m = n$ та изометрија је јединствена, док за $m = n - 1$ постоје тачно две такве изометрије. Ово тврђење доказујемо математичком индукцијом по m .

Претпоставимо да постоји изометрија f таква да важи $f(A_i) = B_i$ за $0 \leq i \leq m-1$ са додатним $f(A_m) = B$. Нека је $B \neq B_m$, иначе смо решили корак индукције. Како је

$$\delta(B_i, B_m) = \delta(A_i, A_m) = \delta(f(A_i), f(A_m)) = \delta(B_i, B),$$

то тачка B_i по Теорему 6.10 припада медијатриси Π дужи BB_m . Композиција $\sigma_\Pi \circ f$ је изометрија за коју важи $(\sigma_\Pi \circ f)(A_i) = \sigma_\Pi(B_i) = B_i$, као и $(\sigma_\Pi \circ f)(A_m) = \sigma_\Pi(B) = B_m$.

Кад изометрија нема фиксну тачку, често се по узору на Теорему 6.4 разлаже на транслацију и изометрију која има фиксних тачака. Добро је да редослед композиције није битан, односно да имамо $f = \tau_v \circ g = g \circ \tau_v$, што се дешава кад је $\vec{g}(v) = v$, односно $\Phi_g \parallel v$. Тако долазимо до теореме о канонском разлагању изометрије.

Теорема 6.14. *Свака изометрија се једнозначно разлаже са $f = \tau_v \circ g$ уз $\emptyset \neq \Phi_g \parallel v$.*

Основна идеја је посматрати векторски потпростор $\text{Ker}(\vec{f} - \mathbb{1}) \leq \vec{E}$ и тачку $P \in E$. Како је $\vec{f} = \vec{\tau}_v \circ \vec{g} = \vec{g}$, видимо суплементарне просторе $\Pi = P + \text{Ker}(\vec{f} - \mathbb{1}) \parallel \Phi_g$ и $\Gamma = P + \text{Ker}(\vec{f} - \mathbb{1})^\perp$. Због $\Gamma \perp \Phi_g$ је $g\Gamma \perp g\Phi_g = \Phi_g$, а како g има фиксну тачку S где је $\Phi_g \cap \Gamma = \{S\}$, можемо закључити да је $g\Gamma = \Gamma$, односно $f\Gamma = \tau_v\Gamma$. Из услова $v \parallel \Phi_g$ се јединственост за v лако види.

Важно је приметити да у специјалном случају кад g има само једну фиксну тачку, $\Phi_g = \{S\}$, услов $v \parallel \{S\}$ даје $v = 0$, што значи да нема транслације!

Класификацију изометрија вршимо тако што полазимо од мањих димензија n и идемо ка већим. Најпре примењујемо Теорему 6.14 која канонски разлаже изометрију $f = \tau_v \circ g$ где је $\emptyset \neq \Phi_g \parallel v$. Затим вршимо дискусију по $0 \leq \dim \Phi_g \leq n$, где се, по Теорему 6.13, g разлаже као композиција не више од $n - \dim \Phi_g$ рефлексција.

Размотримо најпре афину праву, $n = 1$. За $\dim \Phi_g = 0$ је $\Phi_g = \{S\}$ и $v = 0$, те $f = g$. Притом Φ_g је хиперраван, те је f рефлексција, односно **централна симетрија** са центром S . За $\dim \Phi_g = 1$ је $\Phi_g = E$, односно $g = \mathbb{1}$, те је $f = \tau_v$ **транслација** (и посебно за $v = 0$ идентичко).

Следећи случај је афина раван, $n = 2$. За $\dim \Phi_g = 0$ је $\Phi_g = \{S\}$, те $f = g$, одакле имамо $f = \sigma_a \circ \sigma_b$, при чему су a и b праве (хиперравни) које се секу у S , те је f **роџаација**. За $\dim \Phi_g = 1$ је $g = \sigma_a$, тако да су опције **рефлексција** $f = \sigma_a$ и **клизајућа рефлексција** $f = \tau \circ \sigma_a$. Наравно, за $\dim \Phi_g = 2$ је $g = \mathbb{1}$, те је f **транслација**.

Долазимо до изометрија (тродимензионог) простора, $n = 3$. За $\dim \Phi_g = 3$ је $g = \mathbb{1}$, те је f **транслација**. За $\dim \Phi_g = 2$ је $g = \sigma_a$, тако да су опције **рефлексција** $f = \sigma_a$ и **клизајућа рефлексција** $f = \tau \circ \sigma_a$.

Случај $\dim \Phi_g = 1$ је компликованији. Како је Φ_g права, то кроз $X \in E$ постоји јединствена раван Π са $X \in \Pi \perp \Phi_g$. Тада је $g\Pi \perp g\Phi_g = \Phi_g$, као и $g(X_0) = X_0$ за орто-пројекцију из X на Φ_g , те важи $g\Pi = \Pi$. Рестрикција $g|_\Pi$ је изометрија у Π са тачно једном фиксном тачком X_0 , те је у питању ротација. То се дешава у свакој таквој равни Π , те глобална изометрија даје и једнаке углове ротације и добијамо да је g **осна роџаација**. Додатно имамо опцију $f = \tau \circ g$, што је у овом случају **завојно кретање**.

Последњи случај $\dim \Phi_g = 0$ као и раније нема транслацију, $f = g$ и $\Phi_f = \{S\}$. Можемо искористити централну симетрију σ_S да бисмо конструисали изометрију $\sigma_S \circ f$ која је директна (јер је f индиректна као композиција три рефлексije), те мора, поред S имати још фиксних тачака. Прва опција је $\sigma_S \circ f = \mathbb{1}$ која даје **централну симетрију** $f = \sigma_S$. Друга опција је $\sigma_S \circ f = \rho_{\Gamma, \theta}$ осна ротација око праве $\Gamma = \Phi_{\sigma_S \circ f} \ni S$ за угао θ . Како је $\sigma_S = \sigma_\Pi \circ \rho_{\Gamma, \pi}$ где је $S \in \Pi \perp \Gamma$, то имамо $f = \sigma_S \circ \rho_{\Gamma, \theta} = \sigma_\Pi \circ \rho_{\Gamma, \theta + \pi}$ и добили смо **роџаациону рефлексiju**.

Ако се растојање пресликавањем f мења пропорционално, односно уколико важи $\delta(f(X), f(Y)) = \lambda \delta(X, Y)$ за неко $\lambda > 0$, у питању је **сличност**. Наравно, специјални случај сличности за $\lambda = 1$ је изометрија. Основни пример сличности је хомотетија

јер за њу важи,

$$\begin{aligned}\delta(\chi_{S,\theta}(X), \chi_{S,\theta}(Y)) &= \delta(S + \theta\vec{SX}, S + \theta\vec{SY}) = \left\| \overrightarrow{(S + \theta\vec{SX})(S + \theta\vec{SY})} \right\| \\ &= \|\theta\vec{SY} - \theta\vec{SX}\| = \|\theta\vec{XY}\| = |\theta|\|\vec{XY}\| = |\theta|\delta(X, Y).\end{aligned}$$

Композиција сличности је сличност са коефицијентом који је једнак производу коефицијената. Уколико сличност f има коефицијент различит од 1, онда f не може имати више од једне фиксне тачке. Међутим, како је $\text{Ker}(\vec{f} - 1) = 0$ то f мора имати фиксну тачку, одакле закључујемо да је фиксна тачка јединствена. Због тога, сличност са коефицијентом $\lambda \neq 1$ и фиксном тачком S можемо записати као $\chi_{S,\lambda} \circ f$ где је f изометрија која фиксира S . Проласком кроз класификацију изометрија на овај начин једноставно добијамо класификацију сличности.

ДОДАТАК

А.1 Сопствена структура квадратне матрице

Линеарне трансформације на коначно димензионом векторском простору могу се исказати помоћу квадратних матрица. У ту сврху корисно је имати на располагању алате из линеарне алгебре који се тичу сопствене структуре квадратних матрица.

Нека је A произвољна квадратна матрица. Уколико за неки ненула вектор (коло-ну) V и број $\lambda \in \mathbb{R}$ важи једначина $AV = \lambda V$, тада кажемо да је λ **сопствена вредност** матрице A , док је V њен **сопствени вектор** који одговара тој сопственој вредности. Овај услов еквивалентан је хомогеној једначини $(A - \lambda \mathbb{1})V = 0$, која у случају $\det(A - \lambda \mathbb{1}) \neq 0$ има јединствено решење $V = 0$, тако да тада нема сопствених вектора. Дакле, сопствени вектор V постоји само ако одговара сопственој вредности λ која је нула **карактеристичног полинома**

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$$

наше матрице A . Скуп свих сопствених вектора који одговарају некој сопственој вредности λ , заједно са нула вектором, чине **сопствени подпростор** $\text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1})$. Вектори из различитих сопствених потпростора су суштински различити о чему говори наредна лема.

Лема А.1. *Сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима су линеарно независни.*

Доказ. Нека је k минималан број линеарно зависних вектора који одговарају различитим сопственим вредностима матрице A . Нека $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_k X_k = 0$ важи за неке векторе X_i и $\alpha_i \in \mathbb{R}$ са $AX_i = \lambda_i X_i$ за $1 \leq i \leq k$, где су $\lambda_i \in \mathbb{R}$ различити. Множењем слева матрицом A добијамо $\alpha_1 \lambda_1 X_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k X_k = 0$. Ако од ове једначине одуземо претходну множењу са λ_1 добијамо $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 + \dots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1)X_k = 0$. Како је k бирано минимално, то су $X_2, \dots, X_k$ линеарно независни одакле следи $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \dots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0$. Сопствене вредности λ_i су различите и отуда контрадикторно $\alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. $\square$

Веома често срећемо се са симетричном матрицом A , а у том случају на располагању имамо додатне бенефите.

Лема А.2. *Сопствене вредности симетричне матрице су реалне.*

Доказ. У општем случају полином $\chi_A(\lambda)$ се факторише над пољем комплексних бројева $\mathbb{C}$, те за сопствену вредност важи $\lambda \in \mathbb{C}$. Услов $AV = \lambda V$ еквивалентан је свом конјугату $A\bar{V} = \bar{\lambda}\bar{V}$, где је $\bar{V}$ колона која се састоји од конјугата елемената колоне V ,

док је матрица A сама себи конјугат јер за улазе има реалне бројеве. Из једноставног рачуна

$$\lambda \bar{V}^T V = \bar{V}^T A V = (\bar{V}^T A V)^T = V^T A \bar{V} = \bar{\lambda} V^T \bar{V} = \bar{\lambda} (V^T \bar{V})^T = \bar{\lambda} \bar{V}^T V,$$

добивамо $(\lambda - \bar{\lambda}) \bar{V}^T V = 0$, а како је $\bar{V}^T V$ сума квадрата норми елемената из $V \neq 0$, то је $\bar{V}^T V > 0$, одакле следи $\lambda = \bar{\lambda}$, што доказује $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Сопствени вектори из различитих сопствених потпростора су линеарно независни (Лема А.1), али у случају симетричне матрице они морају бити међусобно ортогонални.

Лема А.3. *Сопствени вектори симетричне матрице који одговарају различитим сопственим вредностима су међусобно ортогонални.*

Доказ. Уколико важи $AV = \lambda V$ и $AW = \mu W$, тада је

$$\lambda W^T V = W^T A V = (W^T A V)^T = V^T A W = \mu V^T W = \mu (V^T W)^T = \mu W^T V,$$

одакле следи $(\lambda - \mu) W^T V = 0$. Услов $\lambda \neq \mu$ повлачи $W^T V = 0$, односно $W \cdot V = 0$. $\square$

Штавише, наредна **спектрална теорема** нам дозвољава спектралну декомпозицију читавог векторског простора на директну суму сопствених потпростора, односно

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda} \text{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}).$$

Теорема А.4. *Постоји ортонормирана база простора $\mathbb{R}^n$ која се састоји од сопствених вектора датне симетричне матрице реда n .*

Доказ. За сопствену вредност λ , по Леми А.2 је $\lambda \in \mathbb{R}$ и постоји вектор $E_1 \neq 0$ такав да је $AE_1 = \lambda E_1$, а не умањујући општост E_1 можемо скалирати односно сматрати да је јединичан. Како је $E_1^T A X = X^T A E_1 = \lambda X^T E_1$, видимо да свако X ортогонално на E_1 даје AX ортогонално на E_1 . Та инваријантност нам омогућава да причу рестрикујемо на векторски простор $\text{Span}\{E_1\}^\perp$ што је потпростор од $\mathbb{R}^n$ димензије $n - 1$. Индукција нам даје ортонормирану базу $E_2, \dots, E_n$ у $\text{Span}\{E_1\}^\perp$ која се састоји од сопствених вектора и допуњује са E_1 до комплетне базе у $\mathbb{R}^n$. $\square$

А.2 Теорија бројева

У овој секцији изложили смо неке старе резултате из теорије бројева који су нам потребни да образложимо неке напредне резултате који су углавном везани за Брук-Рајзер теорему (Теорема 2.16).

Ојлеров идентитет о четири квадрата, појављује се у Ојлеровом писму Голдбаху¹ из 1748. године [28].

Лема А.5 (Ојлер). *Важи идентитет $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2$, где је $c_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$, $c_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_4 - a_4 b_3$, $c_3 = a_1 b_3 - a_2 b_4 - a_3 b_1 + a_4 b_2$, $c_4 = a_1 b_4 + a_2 b_3 - a_3 b_2 - a_4 b_1$.*

Доказ је очигледан и ради се конкретном провером. Важно је приметити да је линеарна веза

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & -b_1 & b_4 & -b_3 \\ b_3 & -b_4 & -b_1 & b_2 \\ b_4 & b_3 & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

¹Christian Goldbach (1690–1764), немачки математичар

дата матрицом детерминанте $(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)^2 \neq 0$ бијективна, односно да можемо линеарно изразити обрат

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & -b_1 & -b_4 & b_3 \\ b_3 & b_4 & -b_1 & -b_2 \\ b_4 & -b_3 & b_2 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}.$$

Ојлеров идентитет употребио је Лагранж, да би 1770. доказао своју теорему о четири квадрата у [50].

Лема А.6 (Лагранж). *Сваки природан број може се представити као збир четири квадрата целих бројева.*

Доказ. Захваљујући Леми А.5 довољно је доказати лему за непарне просте бројеве p . Како потпуни квадрати имају $(p+1)/2$ различитих остатака по модулу p , то по Дирихлеовом принципу постоје цели бројеви a и b такви да p дели $a^2 + b^2 + 1$, што повлачи да постоји $n < p$ такво да је $a^2 + b^2 + 1^2 + 0^2 = np$. Нека је $m \in \mathbb{N}$ најмањи такав да је $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Ако уведемо $y_i \equiv x_i \pmod{m}$ за $y_i \in [(1-m)/2, m/2]$ имамо $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = mr$ за неко $r < m$. Из нове примене Леме А.5 добијамо $mprmr = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$, где $y_i \equiv x_i \pmod{m}$ даје $z_2 \equiv z_3 \equiv z_4 \equiv 0 \pmod{m}$, као и $z_1 \equiv y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = mr \equiv 0 \pmod{m}$. Замена $w_i = z_i/m$ повлачи $rp = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$ са $r < m$, али како је m биран као најмањи то мора бити $m = 1$, односно $p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ је збир четири квадрата. $\square$

Лема А.7. *Ако је $px^2 = y^2 + z^2$ за целобројне n, x, y, z , тада је n збир два квадрата.*

Доказ. Нека је p неки прост фактор броја n , имамо $y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{p}$, те постоји најмањи r тако да је $rp = y^2 + z^2$ збир два квадрата. Ако уведемо $u \equiv y \pmod{r}$ и $v \equiv z \pmod{r}$ тако да је $|u|, |v| \leq r/2$ имамо $u^2 + v^2 \equiv y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{r}$, те је $u^2 + v^2 = rs$. Добијамо једначину $r^2sp = (rp)(rs) = (y^2 + z^2)(u^2 + v^2) = (yv - zu)^2 + (yu + zv)^2$, односно

$$sp = \left(\frac{yv - zu}{r}\right)^2 + \left(\frac{yu + zv}{r}\right)^2,$$

због $yv - zu \equiv yz - zy = 0 \pmod{r}$ и $yu + zv \equiv y^2 + z^2 \equiv 0 \pmod{r}$. Међутим, како важи неједнакост

$$s = \frac{rs}{r} = \frac{u^2 + v^2}{r} \leq \frac{(\frac{r}{2})^2 + (\frac{r}{2})^2}{r} = \frac{r}{2} < r,$$

то следи да је sp збир два квадрата за $s < r$. Зато је $r = 1$, односно p је збир два квадрата. Већ виђена трансформација $(y^2 + z^2)(u^2 + v^2) = (yv - zu)^2 + (yu + zv)^2$ омогућава да производ збинова два квадрата и даље буде збир два квадрата, те факторизација броја n на просте бројеве омогућава да он буде збир два квадрата. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Adam & B. J. Mautschler : *On Wedderburn's theorem about finite division algebras*, Universität Bielefeld, Preprint, 2003.
- [2] B. Alimpić, N. Bokan & Z. Šnajder : *Zbirka zadataka iz projektivne i nacrtne geometrije*, Naučna knjiga, Beograd, 1992.
- [3] В. Андрејић : *Проективна геометрија равни*, Математички факултет, Београд, 2016.
- [4] F. Bachmann : *Aufbau der geometrie aus dem spiegelungsbegriff*, Mathematischen wissenschaften 96, Springer, Berlin, 1959.
- [5] R. Baer : *Homogeneity of Projective Planes*, Am. J. Math. **64** (1942), 137–152.
- [6] J. Bamberg & T. Penttila : *Completing Segre's proof of Wedderburn's little theorem*, Bull. Lond. Math. Soc. **47** (2015), 483–492.
- [7] G. Bellavitis : *Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica (Calcolo delle equipollenze)*, Ann. Lomb. Veneto **5** (1835), 244–250.
- [8] R. C. Bose : *On the application of the properties of Galois fields to the problem of construction of hyper-Græco-Latin squares*, Sankhyā Indian J. Statistics **3** (1938), 323–338.
- [9] O. Blumenthal : *Lebensgeschichte*. In: D. Hilbert : *Gesammelte abhandlungen, dritter band: analysis, grundlagen der mathematik, physik verschiedenes*, Springer, Berlin (1935), 388–429.
- [10] E. Bobillier : *Philosophie mathématique. Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue*, Ann. de Math. **18** (1827-1828), 320–339.
- [11] N. Bokan & S. Vukmirović : *Projektivna geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, 2004.
- [12] A. Bosse : *Manière universelle de Mr Desargues, pour pratiquer la perspective*, Paris, 1648.
- [13] C.-J. Brianchon : *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré*, J. Éc. Polytech. **6** (1806), 297–311.
- [14] R. H. Bruck & H. J. Ryser : *The non-existence of certain finite projective planes*, Can. J. Math. **1** (1949), 88–93.
- [15] M. Chasles : *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles, 1837.
- [16] M. Chasles : *Note sur une propriété générale des coniques*, Corr. Math. et Physique **4** (1828), 363–371.

- [17] F. M. Clarke & D. E. Smith : "Essay pour les coniques" of Blaise Pascal, Isis **10** (1928), 16–20.
- [18] J. L. Coolidge : *The rise and fall of projective geometry*, Am. Math. Mon. **41** (1934), 217–228.
- [19] H. S. M. Coxeter : *Introduction to geometry*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1969.
- [20] H. S. M. Coxeter : *Projective geometry*, Blaisdell Publishing Company, New York, 1964.
- [21] A. Cronhaim : *A Proof of Hessenberg's Theorem*, Proc. Am. Math. Soc. **4** (1953), 219–221.
- [22] G. Desargues : *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres du cône avec un plan*, Paris, 1639.
- [23] L. E. Dickson : *On the cyclotomic function*, Am. Math. Mon. **12** (1905), 86–89.
- [24] R. Descartes : *La géométrie*. In R. Descartes : *Discours de la méthode*, Leyde, (1637), 376–493.
- [25] L. Euler : *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne: Marcum-Michaelem Bousquet, 1748.
- [26] L. Euler : *De quadratis magicis*, Commentationes arithmeticae **2** (1849), 593–602.
- [27] L. Euler : *Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques*, Commentationes arithmeticae **2** (1849), 302–361.
- [28] L. Euler : *Euler à Goldbach, 4. Mai 1748*. In P. H. Fuss: *em Correspondance mathématique et physique*, Tome I, Saint-Petersbourg, 1843, 450–455.
- [29] G. Fano : *Sui postulati fondamentali della geometria in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Giornale di Matematiche **30** (1892), 106–132.
- [30] P. Fermat : *Ad locos planos et solidos isagoge*. In P. Fermat : *Varia opera mathematica*, Tolosæ, (1679), 1–8.
- [31] K. W. Feuerbach : *Grundriß zu analytischen untersuchungen der dreieckigen pyramide*, Nürnberg, 1827.
- [32] J. Gallier : *Basics of Affine Geometry*. Chapter 12 in *Algebra, Topology, Differential Calculus, and Optimization Theory For Computer Science and Engineering*, 2017.
- [33] C. F. Gauss : *Schumacher an Gauss, 10. August 1842 - Über vermutungen Clausens.*, Gauss Werke **12**, Göttingen, Dieterich, 1863, 16–16.
- [34] J. D. Gergonne : *Philosophie mathématique. Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue*, Ann. de Math. **16** (1825-1826), 209–231.
- [35] A. M. Gleason : *Finite Fano planes*, Am. J. Math. **78** (1956), 797–807.
- [36] M. Hall : *Projective planes*, Trans. Am. Math. Soc **54** (1943), 229–277.
- [37] W. R. Hamilton : *On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra*, Phil. Mag. (3) **25** (1844), 10–13.
- [38] R. Hartshorne : *Foundations of projective geometry*, Benjamin, New York, 1967.
- [39] G. Hessenberg : *Beweis des Desarguesschen satzes aus dem Pascalschen*, Math. Ann **61** (1905), 161–172.

- [40] A. Heyting : *Axiomatic projective geometry*, 2nd Edition, North Holland, 1980.
- [41] D. Hilbert : *Grundlagen der geometrie*, Leipzig, 1899.
- [42] D. R. Hughes & F. C. Piper: *Projective planes*, Springer, 1973.
- [43] A. Jones : *Pappus of Alexandria Book 7 of the Collection*, Springer, 1986.
- [44] G. Kalajdžić & M. Đorić : *Geometrija (materijal za studente)*, 2003.
- [45] I. Keplero : *Ad vitellionem paralipomena, quibus astronomice pars optica traditur*, Francofurti, 1604.
- [46] M. Kline : *Mathematical thought from ancient to modern times*, Vol. 3, Oxford University Press, 1990.
- [47] D. Klive & L. Stemkoski : *Graeco-Latin squares and a mistaken conjecture of Euler*, College Math. J. **37** (2006), 2–15.
- [48] J. H. van Lint & R. M. Wilson : *A course in combinatorics*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2001.
- [49] C. W. H. Lam, L. Thiel & S. Swiercz : *The non-existence of finite projective planes of order 10*, Can. J. Math. **41** (1989), 1117–1123.
- [50] J. L. Lagrange : *Démonstration d'un théorème d'arithmétique*, Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Berlin (1770), 1772, 123–133.
- [51] C. W. H. Lam : *The search for a finite projective plane of order 10*, Am. Math. Mon. **98** (1991), 305–318.
- [52] H. Lenz : *Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalepunkte haben*, Arch. Math. **4** (1953), 327–330.
- [53] Z. Lučić : *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, 2009.
- [54] S. Mills : *Note on the Braikenridge–Maclaurin Theorem*, Notes. Rec. R. Soc. Lond. **38** (1984), 235–240.
- [55] M. Mitrović : *Projektivna geometrija*, Skripta internacional, Beograd, 1997.
- [56] A. F. Möbius : *Der barycentrische calcul*, Leipzig, 1827.
- [57] F. R. Moulton : *A simple non-desarguesian plane geometry*, Trans. Am. Math. Soc **3** (1902), 192–195.
- [58] H. Neumann : *On some finite non-desarguesian planes*, Arch. Math. **6** (1954), 36–40.
- [59] V. Niče : *Uvod u sintetičku geometriju*, Školska knjiga, Zagreb, 1956.
- [60] D. Palman : *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.
- [61] K. H. Parshall : *In pursuit of the finite division algebra theorem and beyond: Joseph H. M. Wedderburn, Leonard E. Dickson, and Oswald Veblen*, Arch. Internat. Hist. Sci. **33** (1983), 274–299.
- [62] G. Pickert : *Projektive ebenen*, Mathematischen wissenschaften 80, Springer, Berlin, 1955.
- [63] J. Plücker : *Über ein neues coordinatensystem.*, J. Reine Angew. Math. **5** (1830), 1–36.

- [64] J. V. Poncelet : *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822.
- [65] J. V. Poncelet : *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques: pour faire suite au Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, J. Reine Angew. Math. **4** (1829), 1–71.
- [66] M. Prvanović : *Projektivna geometrija*, Naučna knjiga, Beograd, 1968.
- [67] J. Richter-Gebert : *Perspectives on projective geometry*, Springer, 2011.
- [68] J. F. Rigby : *Collineations, correlations, polarities, and conics*, Canad. J. Math. **19** (1967), 1027–1041.
- [69] F. W. Stevenson : *A note on projective collineations*, Arch. Math. **23** (1972), 446–448.
- [70] D. R. Stinson : *A short proof of the non-existence of a pair of orthogonal Latin squares of order 6*, J. Combin. Theory Ser. A **36** (1984), 373–376.
- [71] G. K. Staudt : *Geometrie der lage*, Nürnberg, 1847.
- [72] J. Steiner : *Systematische entwicklung der abhängigkeit geometrischer gestalten von einander*, Berlin, 1832.
- [73] E. J. Straume : *A survey of the development of geometry up to 1870*, NTNU, 2009; arXiv:1409.1140 [math.HO].
- [74] G. Tarry : *Le problème des 36 officiers*, C. R. Assoc. Fran. Av. Sci. **1** (1900), 122–123, **2** (1901), 170–203.
- [75] С. Вукмировић & З. Станић : *Збирка задатака из пројективне геометрије са применама у рачунарској графици*, Математички факултет, Београд, 2003.
- [76] O. Weblen & J. W. Young : *Projective geometry*, Ginn and company, 1910.
- [77] J. H. M. Wedderburn : *A theorem on finite algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **6** (1905), 349–352.
- [78] C. Weibel : *Survey of non-Desarguesian planes*, Notices Am. Math. Soc. **54** (2007), 1294–1303.

ИНДЕКС ПОЈМОВА

- аксиома, 53, 55
 - Лобачевског, 56
 - Папосова, 102
 - Плејферова, 55, 163
 - Фаноова, 108
- Алберти, Леон Батиста, 50
- Алимпиић, Бранка, 52
- Аполоније, 51
- афиност, 122
- база
 - векторског простора, 6
 - десно оријентисана, 8
 - лево оријентисана, 8
 - ортонормирана, 11
 - позитивна, 8
- Бамберг, Џон, 107
- барицентар, 166
- Бахман, Фридрих, 110
- Белавитис, Ђусто, 2
- Бер, Рејнхолд, 116
- блок
 - Жорданов, 130
- Блументал, Лудвиг Ото, 53
- Бобијије, Етјен, 51, 61
- Бокан, Неда, 52
- Бос, Абрахам, 78
- Боус, Раџ Чандра, 71
- Брејкенриџ, Вилијам, 144
- Бријаншон, Шарл Жулјен, 149, 51
- Брук, Ричард Хјуберт, 74
- Брунелески, Филипо, 50
- ван Линт, Јакобус Хендрикус, 69
- Варињон, Пјер, 2
- Веблен, Освалд, 52, 85
- Ведерберн, Џозеф, 106
- вектор, 2
 - ненула, 3
 - нула, 3
 - положаја тачке, 13
 - представник, 3, 59
 - сопствени, 93, 179
- супротан, 4
- вектори
 - истог правца, 3
 - колинеарни, 3
 - ортогонални, 6, 173
 - супротног правца, 3
- Вилсон, Ричард Мајкл, 69
- водиља
 - конике, 19
- вредност
 - сопствена, 93, 179
- врста, 69
- врх
 - конуса, 18, 42
- Вукмировић, Срђан, 52
- Галије, Жан Анри, 165
- Галоа, Еварист, 68
- Гаус, Карл Фридрих, 72
- генератриса
 - површи, 41
- геодезијска, 45
- геометрија
 - аналитичка, 1
 - афина, 163
 - пројективна, 50
- Глисон, Ендру, 111
- Голдбах, Кристијан, 180
- група
 - афина, 170
 - Клајнова, 70
- Данделин, Жерминал, 18
- дворазмера, 90, 91
- двотачка, 2
- двоугао
 - сферни, 48
- Дезарг, Жирар, iii, 50, 59, 77
- Декарт, Рене, iii, 1
- дефиниција, 53
 - Штајнерова, 137
- дехомогенизација, 86, 90
- дијаметар, 35

- дијаметри
 конјуговани, 35
 Диксон, Леонард Јуџин, 106
 дилатација, 173
 димензија
 афиног простора, 165
 векторског простора, 6
 директриса
 афиног простора, 165
 конике, 19
 површи, 41
 Дирихле, Јохан Петер Густав Лежен, 70
 доказ, 53
 дужина
 вектора, 3
 еквиполенција, 2
 ексцентрицитет
 конике, 19
 линеарни, 22
 елација, 117, 122, 130
 Елементи, 1, 52, 53
 елипса, 19
 елипсоид, 37
 имагинарни, 37
 Еуклид, 1, 52, 53, 91
 Жергон, Жозеф, 51, 57
 жижа
 конике, 19
 Жордан, Камиј, 130
 закон
 паралелограма, 165
 збир
 вектора, 4
 идентитет
 Ојлеров, 180
 Шалов, 165
 изводница
 конуса, 18
 површи, 41
 изометрија, 174
 директна, 175
 индиректна, 175
 инволуција, 96
 интензитет
 вектора, 3, 173
 инциденција, 54
 Јанг, Џон Весли, 52
 једначина
 векторска равни, 14
 експлицитна праве, 14
 општа праве, 14
 општа равни, 14
 једначине
 канонске праве, 14
 параметарске праве, 13
 параметарске равни, 14
 центра конике, 32
 Карно, Лазар, 51
 Катарина Велика, 72
 квадрат, 69
 грчко-латински, 70
 латински, 69
 магични, 70
 хипер-грчко-латински, 70
 квадрати
 комплетан систем, 70
 ортогонални, 69
 квазигрупа, 65, 69
 кватерниони, 106
 Кејли, Артур, 51
 Кеплер, Јохан, 50, 59
 Клајн, Морис, 52
 Клаусен, Томас, 72
 коефицијент
 правца праве, 14
 Коксетер, Харолд, 110, 52
 колинеација, 113, 126
 перспективна, 116, 117
 пројективна, 114
 централна, 116
 колона, 69
 коника, 137, 140, 18
 дегенерисана, 137
 дуална, 149
 недегенерисана, 137, 142, 143
 коноид, 43
 параболички, 43
 прави, 43
 конус, 42
 елиптички, 38
 прави кружни, 18
 конфигурација, 76
 геометријска, 76
 Дезаргова, 78
 Папосова, 98
 симетрична геометријска, 76
 координате
 вектора, 11
 поларне, 17
 тачке, 13
 хомогене, 59, 61
 корелација, 146
 инволутивна, 147
 пројективна, 146

- Кремона, Луиђи, 51
- крива
 - другог реда, 23
- Кронхајм, Арно, 99
- круг, 17
 - велики, 44
- Лагранж, Жозеф Луј, 181, 74
- Ла Ир, Филип де, 50
- Лам, Клемент, 74
- лема, 53
- Ленз, Ханфрид, 111
- Ли, Софус, 52
- Лобачевски, Николај Иванович, 56
- Маклорен, Колин, 144
- матрица
 - инциденције, 73
 - преласка, 12
- Мебијус, Аугуст Фердинанд, 51, 61
- Менелај, 91
- Митровић, Милан, 52
- модел, 53
 - аналитички, 60
 - интуитивни, 58
- Молтон, Форест Реј, 79
- Монж, Гаспар, 50, 51
- нагиб
 - праве, 14
- независност
 - афина, 169
- неједнакост
 - троугла, 48
- низ
 - тачака, 76
- Ниче, Вилко, 52
- Нојман, Хана, 111
- норма
 - вектора, 3
- нормала
 - мимоилазних правих, 16
- Ојлер, Леонард, 180, 69, 70, 72
- омотач
 - афини, 168
- оператор
 - ортогоналан, 174
- операција
 - сечења, 56, 61
 - спајања, 55, 61
 - тернарна, 64
- ортогонал, 173
- оса
 - колинеације, 113
 - конуса, 18
 - координатног система, 17
 - перспективе, 77
 - површи, 43
- Пајпер, Фред, 52, 66
- Палман, Доминик, 52
- Папос, 51, 91, 98
- парабола, 19
- параболоид
 - елиптички, 38
 - хиперболички, 38
- Паскал, Блез, 143, 50
- Пентила, Тим, 107
- перспективитет, 77, 83
- петља, 65
- петостраник, 76
- петотеменик, 76
- Пикерт, Гинтер, 66
- Пјери, Марио, 52
- Платон, 53
- Плејфер, Џон, 55
- Пликер, Јулијус, 51, 62
- површ
 - другог реда, 36
 - конусна, 42
 - цилиндрична, 41
- површи
 - праволинијске, 41
- пол
 - координатног система, 17
 - праве, 147
- полара, 147, 154
- поларитет, 147
- полином
 - карактеристични, 93, 179
- полупречник
 - круга, 17
- поље, 106
 - Галоаово, 68
 - коначно, 68
- Понселе, Жан-Виктор, 51, 57, 85
- потпростор
 - афини, 166
 - сопствени, 179
- потпростори
 - мимоилазни, 168
 - ортогонални, 173, 174
 - паралелни, 167
 - суплементарни, 172
 - управни, 174
- почетак
 - координатни, 13
- права, 167, 39

- аналитичка пројективна, 86
- бесконачна, 58
- дијагонална, 109
- Папосова, 98
- Паскалова, 144
- самоконјугована, 147
- тачка по тачка фиксна, 113
- фиксна, 113
- правац
 - вектора, 3
- праве, 54
 - конјуговане, 147
 - конкурентне, 54
 - мимоилазне, 16
 - паралелне, 58
- прамен
 - правих, 58, 76
- Првановић, Милева, 52
- пресек
 - конусни, 18
- пресликавање
 - афино, 122, 168
 - перспективно, 77
 - хармонијско, 125
- принцип
 - Дирихлеов, 70
 - дуалности, 55, 57, 110
- производ
 - векторски, 8, 60
 - двоструки векторски, 10
 - мешовити, 9, 60
 - скаларни, 6, 60
- пројективитет, 83
 - елиптички, 94
 - инволутивни, 96
 - параболички, 94
 - хиперболички, 94
- пројектовање
 - ортогонално, 174
 - паралелно, 172
- простор
 - афини, 165
 - еуклидски афини, 173
 - пројективни, 81
 - реални афини, 166
- противоса, 115, 127
- прстен
 - линеаран тернарни, 66
 - тернарни, 64, 66, 71
- раван, 167, 40, 81
 - аналитичка пројективна, 60, 62, 85, 102, 106
 - Бахманова, 110
 - дегенерисана пројективна, 56
 - Дезаргова, 78, 83, 106
 - директорна, 43
 - еуклидска, 55, 57, 61
 - интуитивна пројективна, 58
 - комплексна пројективна, 126
 - коначна пројективна, 67
 - Молтонова, 79
 - не-Дезаргова, 79
 - Папосова, 98, 106
 - пројективна, 57
 - реална пројективна, 61, 126
 - Фаноова, 66, 67, 73, 107
 - хиперболичка, 56
- равни
 - имагинарне паралелне, 40
 - које се секу, 39
 - паралелне, 40
- Рајзер, Херберт Џон, 74
- ред
 - коначне пројективне равни, 68
 - коначне равни, 68
 - поља, 68
- релација
 - еквиполенције, 2
 - инциденције, 54
- репер
 - афини, 170
- рефлексивна, 175, 177
 - клизајућа, 177
 - ротациона, 177
- Рихтер-Геберт, Јирген, 52
- Салмон, Џорџ, 51
- Сверч, Стен, 74
- седло, 38
- Сервоа, Франсоа-Жозеф, 51
- сециште, 56, 61
- симбол, 69
- симетрија, 175
 - централна, 175, 177
- систем
 - Декартов координатни, 13
 - координатни, 13
 - поларни координатни, 17
 - правоугли координатни, 13
- скуп
 - празан, 37, 39, 40
- сличност, 177
- смер
 - вектора, 3
 - исти, 3

- супротан, 3
- смицање, 122
- спојница, 55, 61
- Станић, Зоран, 52
- Стивенсон, Фредерик Вилијам, 117
- Стинсон, Даглас Роберт, 72
- страник, 76
 - потпуни, 76
 - прост, 77
- страница
 - сферног троугла, 45
 - фигуре, 76
- странице
 - несуседне, 107
 - суседне, 77, 107
- Страум, Елдар Јенс, 52
- сфера
 - Данделинова, 18
- Тари, Гастон, 72
- тачка, 37
 - бесконачна, 58
 - Бријаншонова, 149
 - дијагонална, 107
 - самоконјугована, 147
 - фиксна, 93, 113
- тачке, 54
 - колинеарне, 54, 168
 - конјуговане, 147
 - копланарне, 168
- тврђење, 53
 - Дезаргово, 78
 - дуално, 55
 - Обратно Дезаргово, 78
 - О перспективитету, 101
 - Основно пројективитета, 101
 - Папосово, 98, 102
- тело, 105, 106
- теме
 - конуса, 42
 - сферног троугла, 45
 - фигуре, 76
- темена
 - наспрамна, 77
 - суседна, 77
- теменик, 76
 - потпуни, 76
 - прост, 77
- теорема, 53
 - Брејкенриц–Маклорен, 144
 - Бријаншонова, 149
 - Брук–Рајзер, 74
 - Ведербернова, 106
 - Дезаргова, 77
 - косинусна, 46
 - Лагранжова, 181
 - мала Фермаова, 67
 - Обратна Паскалова, 144
 - О перспективитету, 102
 - Основна колинеације, 114
 - Основна корелације, 146
 - Основна пројективитета, 88, 102
 - основна сферне геометрије, 46
 - о три нормале, 174
 - Папосова, 98, 102
 - Паскалова, 143
 - синусна, 47
 - спектрална, 36, 180
 - Хесенбергова, 100
 - Шалова, 149
 - Штајнерова, 143
- теорија
 - аксиома, 54
 - аксиоматска, 53
 - категорична, 54
 - независна, 54
 - непротивречна, 54
 - потпуна, 54
- Тиел, Лери, 74
- трансвекција, 122, 173
- транслација, 122, 170, 177
- трансформација
 - равни, 18
- тространик, 76
- тротеменик, 76
- троугао
 - поларан троуглу, 49
 - сферни, 45
- угао
 - између вектора, 6
 - сферног троугла, 45
- Фано, Ђино, 52, 66
- Ферма, Пјер де, iii, 1
- фигура, 76
- фигуре
 - перспективне, 77
- Фојербах, Карл Вилхелм, 51, 61
- фокус
 - конике, 19
- Хал, Маршал, 66
- Хамилтон, Вилијам Роуан, 106
- Хартсхорн, Робин, 52, 82
- Хејтинг, Аренд, 52
- хеликоид, 43
- Хериот, Томас, 49

- Хесенберг, Герхард, 99
Хилберт, Давид, 52, 53
хипербола, 19
хиперболоид
 дводелни, 38
 једноделни, 38
хиперраван, 167
Хјуз, Данијел, 52, 66
хомологија, 117, 122, 130
хомотетија, 122
хоризонт, 115
центар
 координатне, 113
 криве, 32
 круга, 17
 перспективе, 77
цилиндар, 41
 елиптички, 39
 имагинарни елиптички, 39
 параболички, 40
 прави кружни, 41
 хиперболички, 39
четворка
 хармонијска, 107, 109
четвоространик, 76
четворотеменик, 76
 анти-Фаноов, 108, 111
 Фаноов, 108, 111
Џонс, Александер Рејмонд, 91
Шал, Мишел, 149, 51, 52, 91
шестостраник, 77
шестотеменик, 77
Шнајдер, Загорка, 52
Штајнер, 143
Штајнер, Јакоб, 137, 51
Штаут, Карл фон, 51, 52, 85
Шумахер, Хајнрих Кристијан, 72