Одабрана поглавља механике 2009. **Седми домаћи задатак**

(1) Скрипта *Мини курс о симплектичким многострукостима*,

http : //poincare.matf.bg.ac.rs/ ∼ milinko/skripta/simplekticke.pdf

задаци 78–80.

(2) Доказати да је фамилија Хамилтонових дифеоморфизама ϕ_t, $t \in \mathbb{R}$ генерисана 1–периодичним Хамилтонијаном, тј. таквим да је за свако x $H(x, t+1) = H(x, t)$, ако и само ако је $\phi_{t+1} = \phi_t \circ \phi_1$.

(3) Доказати да је пресликавање

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2, \qquad (x, y) \mapsto (2xy + ix, x^2 - y^2 + iy)$$

тачно Лагранжево улагање.

(4) Нека је

$$\mathbb{S}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \|x\|^2 + y^2 = 1\}$$

јединична n–димензиона сфера и

$$\mathcal{W} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{C}^n, \quad \mathcal{W}(x, y) = (1 + iy)x.$$

Нацртати слику пресликавања $\mathcal{W}$ за $n = 1$ и доказати да је, у општем случају, $\mathcal{W}$ тачна Лагранжева имерзија са једном двоструком тачком.

(5) Нека је (Σ, i) Риманова површ и (M, J) скоро комплексна многострукост. Доказати да је пресликавање $f : \Sigma \to M$ решење нелинеарне нехомогене Коши-Риманове једначине

$$\bar{\partial}_J f = h, \quad \text{где је} \quad \bar{\partial}_J f := \frac{1}{2}(df + J \circ df \circ i),$$

ако и само ако је пресликавање

$$\mathrm{id} \times f : \Sigma \to \Sigma \times M$$

J_h–холоморфно за скоро комплексну структуру J_h на $\Sigma \times M$ дефинисану са

$$J_h(\zeta, X) := (i\zeta, JX + h\zeta).$$

(6) Дат је низ пресликавања

$$u_n : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2, \quad u_n([\zeta : \eta]) = [\zeta^2 : \eta^2 : n\zeta\eta].$$

Доказати да је низ слика $u_n(\mathbb{C}P^1)$ фамилија квадрика $XY = Z^2/n$ која се дегенерише у пар правих $X = 0$, $Y = 0$ кад $n \to \infty$. Доказати да је свака од тих правих мехур који се јавља као последица дивергенције низа u_n.

(7) *Вајерштрасова $\mathcal{P}$–функција* на торусу $\mathbb{T}^2 = \mathbb{C}/\Lambda$, где је $\Lambda = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$, је пресликавање

$$\mathcal{P} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad \mathcal{P}(z) := \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z - \lambda)^2}.$$

(а) Доказати да је $\mathcal{P}$ холоморфно и сурјективно.

(б) Доказати да је лимес низа

$$u_n(z) := \frac{\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(z_0)}{\mathcal{P}(z) - 2^{1/n}\mathcal{P}(z_0)},$$

где је $\mathcal{P}(z_0)$ регуларна вредност пресликавања $\mathcal{P}$ различита од нуле, сингуларна крива са два мехура.